POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ CHEMICZNY

KATEDRA FIZYKOCHEMII I TECHNOLOGII POLIMERÓW

LABORATORIUM Z FIZYKI

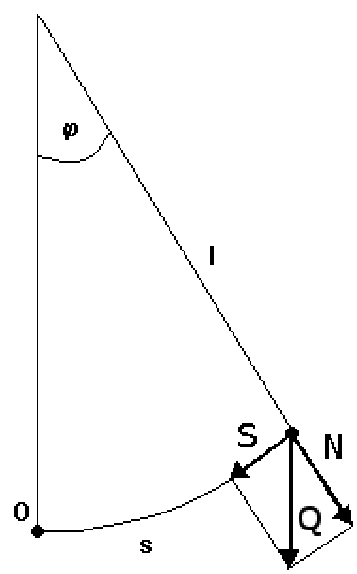
Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła matematycznego

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wahadła matematycznego

1.1.Wprowadzenie

Wahadło matematyczne to punkt matrialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici, wkonujacy ruch w płaszczyźnie piomnowej pod działaniem siły ciężkości. W laboratorium składa się ono z małego obiektu (obciążnika wahadła) zawieszonego na nieważkiej nici. Nić powinna być nierozciągliwa, a odważnik wahadła musi być mały w stosunku do długości nici. Wychylenia wahadła w przód i w tył, bez uwzględnienia tarcia, realizuje ruch drgający prosty. Punkt materialny porusza się po łuku osiągając jednakowe wychylenie (amplitudę) po obu stronach od punktu równowagi (punkt gdzie znajduje się wahadło, gdy jest w spoczynku). Przechodząc przez punkt równowagi wahadło osiąga maksymalną prędkość.

Gdy wahadło wychylone jest o kąt φ, możemy siłę ciężkości Q (a w konsekwencji przyspieszenie g jakiego doznaje obciążnik w polu siły ciężkości) rozłożyć na dwie składowe: jedną składową odpowiadającą sile naprężenia nici N i na składową styczną do toru S ($S = - mg\sin\varphi$). Obciążnik wahadła jest traktowany jako punkt materialny.



Rys.1.1 Wahadło matematyczne

Łuk zatoczony przez punkt materialny ma długość:

$$s = l \cdot \varphi \tag{1.1}$$

$$\frac{s}{2\pi l} \cong \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow s \cong l\varphi$$

gdzie ϕ jest kątem pomiędzy nicią, a pionem, zaś l jest długością nici, jak na rys. 1.1
Przyspieszenie styczne można zapisać następująco:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi \tag{1.2}$$

Dla małych kątów możemy przyjąć:

$$\sin\varphi \cong \varphi \ \text{ i } \ s \cong x \tag{1.3}$$

Stąd z równania (1.2) otrzymujemy:

$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\varphi$, a ponieważ s = l φ to

$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s$ lub $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$ to jest równanie ruchu harmonicznego prostego (1.4)

Wahadło, wychylone o mały kąt z położenia równowagi, wykonuje drgania harmoniczne proste.

Uwzględniając, że $\omega^2 = \frac{g}{l}$ (oscylator harmoniczny) i $\omega = \frac{2\pi}{T}$ możemy napisać równanie na okres wahań:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1.5}$$

gdzie: l – długość wahadła, tj. odległość środka ciężkości ciała od osi obrotu

g – przyspieszenie ziemskie

Stąd przyspieszenie ziemskie możemy obliczyć z następującego wyrażenia:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{1.6}$$

Prosty oscylator harmoniczny

Poziomo poruszający się ciężarek jest przykładem oscylatora harmonicznego prostego. Jest to ciało o masie *m* na sprężynie na który działa liniowa siła sprężystości *F* odwrotnie proporcjonalna do wychylenia *x*.
Zakładając, że na układ nie działają siły zewnętrzne, otrzymujemy:

$F = -kx$

Siłę możemy zapisać zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona jako iloczyn masy i przysieszenia:

$$F = ma = m\frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$-kx = m\frac{d^2 x}{dt^2}$$

$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ (*)

Dla:

$x=A\cos(\varpi t+\varphi)$

$\dot{x}=-A\varpi\sin(\varpi t+\varphi)$

$\ddot{x}=A\varpi^2\cos(\varpi t+\varphi)$

A po wstawieniu do rów. (*)

$mA\varpi^2\cos(\varpi t+\varphi)+kA\cos(\varpi t+\varphi)=0$

$m\varpi^2+k=0$

$\varpi^2=\frac{k}{m}$

Dla wahadła matematycznego

$k=\frac{mg}{l}$

1.2. Część doświadczalna

Dokonujemy serii pomiarów okresu wahań T_1 przy dowolnej długości wahadła. Następnie skracamy lub wydłużamy długość wahadła o znaną wartość D i mierzymy nowy okres T_2

Ponieważ:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \tag{1.7}$$

oraz

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \tag{1.8}$$

Stąd:

$$T_1^2-T_2^2=\frac{4\pi^2}{g}(l_1-l_2)=\frac{4\pi^2D}{g} \tag{1.9}$$

A zatem zależność na obliczenie przyspieszenia ziemskiego przybiera postać:

$$g=\frac{4\pi^2D}{T_1^2-T_2^2} \tag{1.10}$$

Możemy przyjąć takie przybliżenie ponieważ pomimo, że drgania wahadła są w istocie drganiami tłumionymi i ich amplituda maleje z czasem do zera, lecz ich okres, jako niezależny od amplitudy nie ulega zmianie. Wzór (1.5) jest ważny tylko dla bardzo małych amplitud ($\varphi < 5^0$). W celu zmierzenia okresu T mierzymy kilkakrotnie (5-10 razy) czas trwania kilkudziesięciu (50-100) okresów. Z otrzymanych wyników tworzymy średnią a następnie obliczamy okres drgań T.

Wyniki zapisujemy w tabeli:

Numer pomiaru	Długość D	Okres drgań T

1.3 Wyniki, obliczenia i analiza błędów

Z danych zebranych w tabeli obliczamy średni okres drgań T:

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \tag{1.11}$$

średnią długość D:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \tag{1.12}$$

Oraz odpowiednie odchylenia standardowe.
Po obliczeniu przyspieszenia ziemskiego z równania (1.10) należy obliczyć niepewność pomiaru złożonego ze wzoru:

$$dg = \sqrt{\left|\frac{\partial g}{\partial D}\right|^2 dD^2 + \left|\frac{\partial g}{dT_1}\right|^2 dT_1^2 + \left|\frac{\partial g}{dT_2}\right| dT_2^2} \tag{1.13}$$

Końcowy wynik należy podać w postaci:

$$g = \overline{g} \pm dg \tag{1.14}$$

1.4 Pytania

1. Jakie założenia trzeba przyjąć, aby otrzymać równanie drgań harmonicznych prostych?
2. Wyjaśnij źródło przybliżenia sinx=x. Pokaż dla jakich warunków jest to poprawne.
3. Czy możemy przewidzieć wartość okresu drgań na Marsie?
4. Jak zmieni się okres T, gdy wahadło będzie się poruszało z przyspieszeniem a?
5. Co to jest wahadło fizyczne? Wyprowadź równanie jego okresu.
6. Dlaczego bierzemy w obliczeniach pomiary dla dwóch różnych długości wahadła, a nie tylko jednego?
7. Wyprowadź i omów prosty oscylator harmoniczny.

8. Omów drgania harmoniczne proste, tłumione i wymuszone.
9. Co to jest wahadło matematyczne? Wyprowadź równanie jego okresu.
10. Wyprowadź wzory na energię kinetyczną, potencjalną i całkowitą dla ciała o masie m poruszającego się ruchem harmonicznym.

1.5 Literatura

1. S.Szczeniowski, *Fizyka Doświadczalna, Część I, Mechanika i Akustyka,*PWN, Warszawa, 1980
2. J.Orear, *Fizyka, Tom I,* PWN Warszawa 1980
3. R.Resnick, D.Halliday, *Fizyka, Tom I,* PWN, Warszawa,1980
4. H.Szydłowski, *Pracownia fizyczna,* PWN, Warszawa, 1994
5. Douglas C.Giancoli, *Physics for Scientist & Engineers* ,Prentice Hall, 2000

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ CHEMICZNY

KATEDRA FIZYKOCHEMII I TECHNOLOGII POLIMERÓW

LABORATORIUM Z FIZYKI

Wyznaczanie momentów bezwładności brył sztywnych metodą zawieszenia trójnitkowego

2 Wyznaczanie momentów bezwładności brył sztywnych metodą zawieszenia trójnitkowego

2.1 Wprowadzenie

Rozpatrzmy obracającą się bryłę sztywną, np. koło obracające się wokół osi przechodzącej przez jego środek. Możemy potraktowac koło, jako obiekt, który składa się z wielu cząsteczek umieszczonych w różnych odległościach R_1, R_2, ... R_n od jego osi obrotu.

Moment bezwładności bryły mierzy siłę z jaką obiekt przeciwstawia się zmianom prędkości obrotowej i jest określony równaniem:

$$I = \sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots\ldots [\mathrm{kg\ m^2}] \qquad (2.1)$$

Suma $\sum m_i R_1^2$ jest sumą iloczynów mas cząstek i kwadratów ich odległości do osi obrotu.

Jak wynika z równania (2.1) moment bezwładności bryły zależy nie tylko od jego masy ale również od tego jak rozłożona jest jego masa względem osi obrotu. Na przykład cylinder o dużej średnicy będzie miał większy moment bezwładności niż walec o tej samej masie lecz mniejszej średnicy wynika to z tego, że cząstki bardziej oddalone muszą podlegać większym zmianom prędkości stycznej przy zadanej zmianie prędkości kątowej. Moment bezwładności danego obiektu jest różny dla różnych osi obrotu.

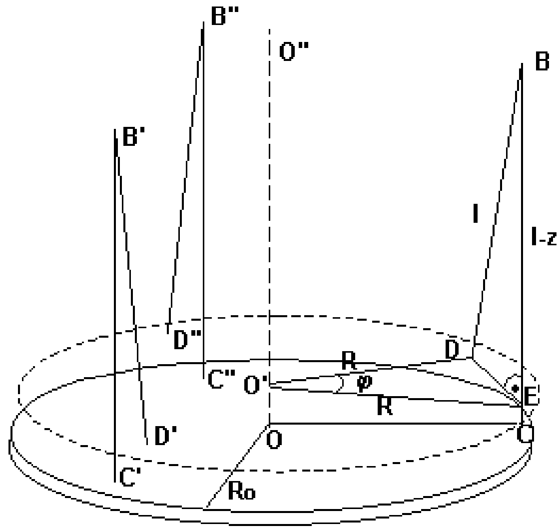
Wiele brył sztywnych może być rozpatrywanych jako obiekty o ciągłym rozkładzie masy.
W takim przypadku moment bezwładności otrzymujemy z wyrażenia:

$$I = \int R^2 dm \qquad (2.2)$$

gdzie dm odpowiada infinitezymalnie małym częściom ciała a R jest odległością prostopadłą do osi obrotu. Całkowanie wykonuje się po całej objętości (zazwyczaj jest to całka podwójna lub potrójna).

2.2 Część doświadczalna

Bryłę o masie m_1, której moment bezwładności I_1 względem osi (głównej, centralnej) pragniemy wyznaczyć, kładziemy na poziomej, jednorodnej tarczy kołowej o promieniu R_0, zawieszonej na trzech pionowych niciach. Nici mają jednakową długość l i są przymocowane do tarczy w równych odległościach R od jej środka O w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Oś główna bezwładności bryły powinna pokrywać się z osią tarczy OO” (rys. 2).



Rys. 2.1 Przyrząd do wyznaczania momentów bezwładności

Jeżeli obrócimy tarczę o niewielki (kilka stopni) kąt φ, to punkt C zajmie położenie D, a środek ciężkości zawieszonych mas podniesie się o niewielki odcinek z. Jeżeli teraz puścimy tarczę, będzie ona wykonywać drgania o okresie:

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{m_0 + m_1}}\sqrt{\frac{l}{g}} = C\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{m_0 + m_1}} \tag{2.3}$$

gdzie: m_0 - masa tarczy

I_0 - moment bezwładności pustej tarczy

Wzór ten wynika bezpośrednio z zapisania drugiego prawa Newtona ruchu obrotowego dla układu tarczy. Gdy obrócimy tarczę o pewien kąt φ, nitki odchylą się od pionu w przybliżeniu o kąt β=φR/l. Na odchylone nitki działa siła grawitacji pochodząca od tarczy i badanego ciała. Siła ta wyznacza składową pionową naprężenia nici. Dla małych wychyleń, składowa ta jest prawie równa całkowitemu naprężeniu nici. Z kolei składowa pozioma naprężenia równa jest naprężeniu, przemnożonemu przez sinβ. Stąd, drugie prawo Newtona dla tego układu to

$$I\varepsilon = -Rmg\sin\beta$$
$$I\varepsilon \approx -Rmg\beta$$
$$I\varepsilon \approx -Rmg\frac{R}{l}\varphi$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx -\frac{m}{I}\frac{g}{l}R^2\varphi$$

Ostatnie równanie jest równaniem oscylatora harmonicznego względem φ. W równaniu takim, współczynnik stojący przy -φ po prawej stronie to kwadrat częstości kolowej ω^2. Wobec tego,

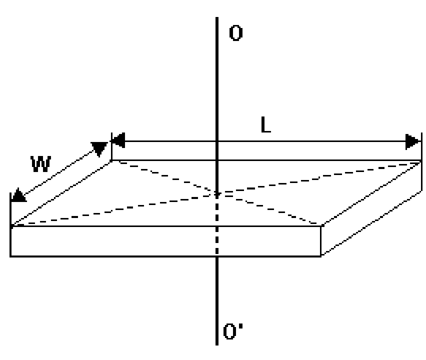
$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{m}{I}\frac{g}{l}R^2$$
$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{I}{M}\frac{l}{g}}$$

Dla znanych wartości R i l możemy obliczyć stałą $C = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{l}{g}}$, a następnie moment bezwładności pustej tarczy I_0 z równania:

$$I_0 = \frac{m_0 R_0^2}{2} \tag{2.4}$$

Następnie mierząc T wyliczamy I_1 ze wzoru (2.3).

Wyznaczamy moment bezwładności drewnianego prostopadłościanu względem jednej z głównych, centralnych osi bezwładności i porównujemy wielkość otrzymaną z wielkością obliczoną na podstawie pomiarów długości krawędzi i masy (rys.2.2).



Rys. 2.2 Prostopadłościan z wymiarami potrzebnymi do obliczenia momentu bezwładności

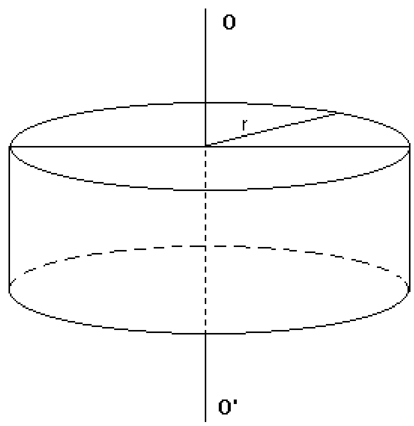
Moment bezwładności jednorodnego prostopadłościanu (rys. 2.2) o masie m względem osi OO' prostopadłej do krawędzi W i L wynosi:

$$I = \frac{1}{12} m\left(L^2 + W^2\right) \tag{2.5}$$

Analogicznie należy policzyć moment bezwładności dla stalowego prostopadłościanu oraz drewnianego krążka (rys. 2.3)

Moment bezwładności walca o promieniu r jest równy:

$$I = \frac{1}{2} mr^2 \tag{2.6}$$



Rys. 23Walec z wymiarami potrzebnymi do obliczenia momentu bezwładności

Pomiary okresu T należy przeprowadzić sześć razy dla każdego rodzaju bryły sztywnej. Dane należy umieścić w tabeli.

2.3 Wyniki, obliczenia i analiza błędów

Dla danych zebranych w tabeli 2.1 obliczamy średnie wartości pomiaru i błąd metodą różniczki zupełnej.

Tabela 2.1

Typ ciała (np. metalowy walec, drewniany walec, metalowy prostopadłościan)	Czas [s]	Okres T [s]

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \tag{2.7}$$

Po obliczeniu I z równania (2.3) należy obliczyc niepewność pomiaru złożonego z wzoru:

$$dI = \sqrt{\left|\frac{\partial I}{\partial T}\right|^2 dT^2 + \left|\frac{\partial I}{dl}\right|^2 dl^2 + \left|\frac{\partial I}{dR}\right|^2 dR^2 + \left|\frac{\partial I}{\partial R_0}\right|^2 dR_0^2} \tag{2.8}$$

Końcowy wynik należy podac w postaci:

$$I = \bar{I} \pm dI \tag{2.9}$$

Porównaj moment bezwładności uzyskanego z danych eksperymentalnych z wielkością obliczoną na podstawie pomiarów długości krawędzi i masy.

2.4 Pytania

1. Pokaż, że moment bezwładności jednorodnej tulei (wydrążonego walca) o wewnętrznym promieniu R_1, zewnętrznym promieniu R_2 i masie M jest równe $I = \frac{1}{2} M \left(R_1^2 + R_2^2\right)$ przy założeniu, że oś obrotu pokrywa się z osią symetrii.
2. Na czym polega zasada zachowania momentu pędu?
3. Wyprowadź i wyjaśnij pojęcie energii kinetycznej w ruchu obrotowym.
4. Zdefiniuj moment siły. Gdzie możemy wykorzystać moment siły?
5. Wyprowadź wzór na pracę i moc dla ciała obracającego się wokół ustalonej osi.
6. Omów miary bezwładności w ruchu postępowym i obrotowym.
7. Wyprowadź i omów równanie oscylatora harmonicznego względem ϕ
8. Podaj i omów twierdzenie Steinera.
9. Co to jest bryła sztywna?
10. Omów podstawowe prawa dynamiki bryły sztywnej.

2.5 Literatura

1. S.Szczeniowski, *Fizyka Doświadczalna, Część I, Mechanika i Akustyka,*PWN, Warszawa, 1980
2. J.Orear, *Fizyka, Tom I,* PWN Warszawa 1980
3. R.Resnick, D.Halliday, *Fizyka,* PWN, Warszawa,1980
4. H.Szydłowski, *Pracownia fizyczna,* PWN, Warszawa, 1994
5. Douglas C.Giancoli, *Physics for Scientist & Engineers* ,Prentice Hall, 2000