Obliczenia do zadań z długością łuku krzywej

Przemysław Borys

5 marca 2009

1 Wstęp

Już dość proste krzywe komplikują wzór

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{1}$$

tak bardzo, że całki stają się niemożliwe do obliczenia analitycznego. Wystarczy powiedzieć, że funkcje z pierwiastkami tworzą klasę funkcji do których najmniej mamy stablicowanych rozwiązań i metod postępowania. Znane metody postępowania ograniczają się do przypadku, gdy pod pierwiastkiem jest trójmian (podstawienia Eulera), gdy pod pierwiastkiem jest iloraz funkcji liniowych itp. proste przypadki. Już pojawienie się pod pierwiastkiem wielomianu stopnia czwartego prowadzi do całek eliptycznych, których nie da się w ogólny sposób rozwiązać.

Czy to znaczy, że wzór na długość krzywej jest bezużyteczny? Absolutnie, nie! Pamiętamy definicję całki oznaczonej Riemanna, wyznacza ona pole pod krzywą całkowanej funkcji w zakresie od a do b. Takie pole możemy łatwo policzyć na komputerze, wykorzystując np. następujący pseudokod:

```
n=1000
dx=(a-b)/n
x=a
calka=0

dopóki x<b, wykonuj cyklicznie:
     calka=calka+dx*[sqrt(1+y'(x))]
     x=x+dx
koniec pętli
```

Po wykonaniu tego kodu, w zmiennej *calka* znajdować się będzie numeryczne oszacowanie długości łuku krzywej. Tym dokładniejsze, im mniejsze

dx (czyli im większa liczba kroków n). Oczywiście pokazana metoda jest bardzo prymitywna i wymaga dobrania małego dx by uzyskać dobre wyniki. Są jednak metody sprawdzające się przy większych wartościach dx (mówimy o zmianie dx np. dziesięciokrotnej, stukrotnej), np. metoda trapezów i metoda Simpsona całkowania numerycznego. Nie będę tego jednak rozwijać, zainteresowani znajdą odpowiednie materiały np. na wikipedii.

2 $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$

Chwila zastanowienia i spojrzenia na definicję tej funkcji mówi nam, że jest to sinus hiperboliczny, $y = \sinh x$. Pochodna sinusa hiperbolicznego to kosinus hiperboliczny, $y' = \cosh x$. Podstawiamy do wzoru na długość krzywej:

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \cosh^2 x} dx \tag{2}$$

Gdybyśmy mieli pod pierwiastkiem $1+\sinh^2 x$, sprawa byłaby scałkowana od ręki, gdyż dla funkcji trygonometrycznych istnieje również relacja „jedynki trygonometrycznej", która wygląda jak $-\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$. Stąd, pod pierwiastkiem zostałby $\cosh^2 x$, który po spierwiastkowaniu jest zwykłym kosinusem hiperbolicznym, który łatwo scałkować.

Niestety, tak nie jest w naszym przypadku (błąd autora zadania?). Można oczywiście za pomocą wielu przekształceń przejść z funkcją podcałkową do funkcji niewymiernej typu pierwiastek z ilorazu wielomianów, ale tablice całek i metody postępowania z takimi całkami są ograniczone i tutaj zawodzą.

Co robić? Opcją pierwszą, jest zaprzęgnięcie komputera do obliczeń numerycznych (patrz wcześniej). Opcją drugą jest zapisanie funkcji podcałkowej w przyjemniejszej postaci, np. w postaci wielomianowej.

Jak to zrobić? Za pomocą szeregu Taylora. Problem jest tylko taki, że w praktyce nie da się uwzględnić nieskończenie wielu wyrazów takiego rozwinięcia i musimy liczyć się z błędami obcięcia. Przybliżymy funkcję podcałkową za pomocą wielomianu stopnia czwartego. W tym celu potrzebne są cztery pochodne funkcji podcałkowej. Zaczynamy:

$$f(x) = \sqrt{1 + \cosh^2 x} \tag{3}$$

$$f(x) = (1 + \cosh^2 x)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

$$f(0) = \sqrt{2} \tag{5}$$

$$f'(x) = (1 + \cosh^2 x)^{-\frac{1}{2}} \cosh x \sinh x \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 0 && (7)\\
f''(x) &= -(1+\cosh^2 x)^{-\frac{3}{2}}\cosh^2 x\sinh^2 x\\
&+ (1+\cosh^2 x)^{-\frac{1}{2}}\left[\cosh^2 x+\sinh^2 x\right] && (8)\\
f''(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} && (9)\\
f'''(x) &= 3(1+\cosh^2 x)^{-\frac{5}{2}}\cosh^3 x\sinh^3 x\\
&- 2(1+\cosh^2 x)^{-\frac{3}{2}}\left[\cosh x\sinh^3 x+\cosh^3 x\sinh x\right]\\
&- (1+\cosh^2 x)^{-\frac{3}{2}}\left[\cosh^3 x\sinh x+\sinh^3 x\cosh x\right]\\
&+ 4(1+\cosh^2 x)^{-\frac{1}{2}}\sinh x\cosh x && (10)\\
f'''(x) &= 0 && (11)\\
f^{iv}(0) &= -3(1+\cosh 0)^{-\frac{3}{2}}\cosh^4 0+4(1+\cosh^2 0)^{-\frac{1}{2}}\cosh^2 0 && (12)\\
f^{iv}(0) &= -\frac{1.5}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{2.5}{\sqrt{2}} && (13)
\end{aligned}
$$

Czwarta pochodna została policzona w uproszczony sposób przez spostrzeżenie: jeśli liczymy ją w punkcie $x=0$, to możemy podarować sobie różniczkowanie wszelkich członów $f'''(x)$, które po zróżniczkowaniu mnożone byłyby przez $\sinh 0$, który jest równy zeru. Stąd, różniczkowane były tylko czynniki zawierające $\sinh x$ w pierwszej potędze (po zróżniczkowaniu ten sinus przechodzi w kosinus hiperboliczny).

Mamy zatem przybliżenie,

$$\sqrt{1+\cosh^2 x}\approx\sqrt{2}+\frac{x^2}{2!\sqrt{2}}+\frac{2.5x^4}{4!\sqrt{2}} \tag{14}$$

czyli,

$$\sqrt{1+\cosh^2 x}\approx\sqrt{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{2}}+\frac{2.5x^4}{24\sqrt{2}} \tag{15}$$

Całkujemy w zadanych granicach:

$$
\begin{aligned}
L &\approx \int_{-1}^{1}\sqrt{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{2}}+\frac{2.5x^4}{24\sqrt{2}}dx && (16)\\
L &\approx 2\int_{0}^{1}\sqrt{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{2}}+\frac{2.5x^4}{24\sqrt{2}}dx && (17)\\
L &\approx 2\sqrt{2}x+\frac{x^3}{3\sqrt{2}}+\frac{x^5}{24\sqrt{2}}\Big|_0^1 && (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &\approx 2\sqrt{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{24\sqrt{2}} &(19)\\
L &\approx 3.0936 &(20)
\end{aligned}
$$

Dokładna wartość scałkowana numerycznie to: 3.0928. Czyż nie sprawdzają się te metody?

3 $y = lnx$, $x \in (\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$

Pochodna badanej funkcji to zwykłe $\frac{1}{x}$. Całkowanie nie jest trudne:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx &(21)\\
L &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}dx &(22)\\
L &= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx &(23)\\
& \begin{array}{l} t^2 = 1+x^2 \\ tdt = xdx \\ dx = \frac{t}{x}dt \\ t(\sqrt{3}) = 2 \\ t(2\sqrt{2}) = 3 \end{array} &(24)\\
L &= \int_2^3 \frac{t^2}{x^2}dt &(25)\\
L &= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt &(26)\\
L &= \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt &(27)\\
L &= \int_2^3 1+\frac{1}{t^2-1}dt &(28)\\
L &= \int_2^3 1+\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt &(29)
\end{aligned}
$$

Drugie wyrażenie rozbijamy na ułamki proste (proponuję przeliczyć lub sprawdzić poprawność sprowadzając poniższe dwa ułamki do wspólnego mianownika), otrzymując:

$$
L = \int_2^3 1+\frac{0.5}{t-1}-\frac{0.5}{t+1}dt \qquad (30)
$$

$$L = t + 0.5ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3 \tag{31}$$

$$L = 3 - 2 + 0.5[ln0.5 - ln1/3] = 1 + 0.5ln1.5 \tag{32}$$