Całkowanie metodą podstawiania

Przemysław Borys

24 grudnia 2008

1 Teoria

Metoda całkowania przez podstawianie pozostaje w bliskim związku z pochodną funkcji złożonej:

$$F(x) = f(g(x)) \tag{1}$$

Pochodna takiej funkcji wyraża się (znanym już) wzorem

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{2}$$

Gdyby to równanie scałkować, dostajemy:

$$\int F'(x)dx = \int f'(g)g'(x)dx \tag{3}$$

$$F(x) = \int f'(g)g'(x)dx \tag{4}$$

Przyjmując oznaczenie $t = g(x)$,

$$dt = dg(x) = g'(x)dx \tag{5}$$

(bo $g'(x) = dg/dx$), uzyskujemy zamianę zmiennych w całce:

$$F(x) = \int f'(t)dt \tag{6}$$

Całkując to wyrażenie, uzyskujemy:

$$F(t) = f(t) + C \tag{7}$$

$$F(x) = f(g(x)) + C \tag{8}$$

Niekiedy, zamiast podstawiać $t = g(x)$, bardziej opłaca się podstawić $t^2 = g(x)$ czy inną funkcję g, np. $\varphi(t)$. W metodzie podstawiania chcemy wówczas uzyskać

$$F(t^2) = \int f(t^2)dt \tag{9}$$

czy ogólnie,

$$F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))dt \tag{10}$$

Różnica w stosunku do poprzedniego przypadku polega tu na tym, że funkcja podcałkowa, w której dokonujemy podstawienia zmienia się z $f(.)$ na $f(\varphi(.))$.

Podobnie jak poprzednio, dt definiowany jest wzorem $\frac{dt}{dx}dx$, ale tutaj mamy pewien kłopot z obliczeniem $\frac{dt}{dx}$, mając $\varphi(t) = g(x)$ zamiast $t = g(x)$ (w poprzednim przypadku wystarczyło zróżniczkować $g(x)$).

Zauważmy więc następujące: z pochodnej funkcji złożonej mamy:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dx} \tag{11}$$

Lewą stronę równania możemy łatwo wyznaczyć, bo jest ona po prostu pochodną $g'(x)$. Stąd,

$$g'(x) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dx} \tag{12}$$

i natychmiast,

$$\frac{g'(x)}{\varphi'(t)} = \frac{dt}{dx} \tag{13}$$

stąd,

$$F(x) = f(\varphi(t))\frac{g'(x)}{\varphi'(t)}dx = \int f(\varphi(t))dt \tag{14}$$

2 Praktyka

Powyższy wstęp to teoria i pokazanie explicite związków z pochodną funkcji złożonej. Jaka jest praktyka? W praktyce, dowolną podcałkową funkcję złożoną można zapisać w postaci 3. Np:

$$\int f(g(x))dx = \int f(g(x))\frac{g'(x)}{g'(x)}dx = \int \frac{f(g(x))}{g'(g^{-1}(g(x)))}g'(x)dx \tag{15}$$

Widzimy, ze uzyskaliśmy po prawej stronie pod całką typową pochodną funkcji złożonej, $F(g(x))g'(x)$ przy czym $F(g(x)) = \frac{f(g(x))}{g'(g^{-1}(g(x)))}$. Pomijając skomplikowany zapis, wszystko tutaj gra.

Stąd następująca praktyka do całkowania metodą podstawiania:

- Obserwujemy funkcję podcałkową, zastanawiamy się czy jest to funkcja złożona, w której możnaby podstawić argument literką t, upraszczając wyrażenie (sprowadzając do znanej całki)
- Zapisujemy $t = g(x)$ (definiujemy podstawienie).
- Obliczamy pochodną $\frac{dt}{dx} = g'(x)$. Z tego wzoru wyznaczamy $dx = \frac{dt}{g'(x)}$
- Podstawiamy $g(x) \to t$, $dx \to \frac{dt}{g'(x)}$ w całce.
- Jeśli pod całką zostały czynniki zależne od x, obliczamy $x = g^{-1}(t)$ i podstawiamy tę funkcję w miejsca wszystkich pozostałych x.
- To już wszystko, teraz całkujemy.

Metodę podstawiania można stosować również w ogólniejszym przypadku. Niekiedy nie interesuje nas podstawienie $t = g(x)$, ale np. $t^2 = g(x)$, itd. Wówczas, po lewej stronie podstawienia nie mamy t i nie można łatwo policzyć $\frac{dt}{dx}$, które daje nam związek dx z dt. W tym przypadku można jednak skorzystać ze wzoru (13). Dostajemy tak wzór na dx, a reszta rozumowania pozostaje bez zmian.

Uwaga. Wzoru (13) nie trzeba uczyć się na pamięć. W naturalny sposób uzyskuje się go, różniczkując obustronnie podstawienie $\varphi(t) = g(x)$ do postaci $\varphi'(t)dt = g'(x)dx$! (lewa strona jest różniczkowana po t, prawa po x).