Skąd się wziął wzór Cramera?

Przemysław Borys

5 marca 2009

1 Układ równań

Rozpatrujemy układ równań:

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + ... + A_{1,n}x_n = B_1 \\ ... \\ ... \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + ... + A_{n,n}x_n = B_n \end{cases} \tag{1}$$

który można zapisać w postaci macierzowej,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ ... \\ B_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Wprowadziliśmy macierz A, z której potrafimy policzyć wyznacznik. To jeszcze za mało.

2 Podstawienie Cramera

Co stanie się gdy w macierzy A pierwszą kolumnę zastąpimy wektorem B? Pamiętamy, że $B_k = \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}x_i$. Obliczmy wyznacznik z takiej podstawionej macierzy:

$$det(A_B) = \begin{vmatrix} B_1 & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ B_n & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$det(A_B) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_{1,i}x_i & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ \sum_{i=1}^{n} A_{n,i}x_i & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Z własności, że wyznacznik z macierzy, w kolumnie której występuje suma jest równy sumie wyznaczników (zobacz tekst „skąd się wzięły wyznaczniki" aby zrozumieć tę własność z definicji permutacyjnej),

$$det(A_B) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} A_{1,i}x_i & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ A_{n,i}x_i & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Teraz, z własności, że mnożenie wyznacznika przez liczbę odpowiada pomnożeniu przez liczbę kolumny lub wiersza,

$$det(A_B) = \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} A_{1,i} & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ A_{n,i} & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Tylko dla $i = 1$, pierwsza kolumna nie jest powtórzeniem którejś z kolumn po prawej stronie i tylko wówczas wyznacznik się nie zeruje. Stąd, zostaje nam

$$det(A_B) = x_1 \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$det(A_B) = x_1 det(A) \tag{8}$$

Stąd już prosta droga do wzoru Cramera na x_1. Wzory na pozostałe x_i, uzyskujemy analogicznie.