Rozwiązania szeregów Fouriera z ćwiczeń

Przemysław Borys

23 lutego 2009

1 Zadania

Ilustracja

Na początek prosty przykład:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in< -\pi, 0) \\ 1, & x \int < 0, \pi > \end{cases} \tag{1}$$

Jest on ważny, bo ładnie w nim widać jak kolejne harmoniczne (harmoniki, tzn. kolejne wyrazy w sumie szeregu Fouriera) poprawiają wygląd sygnału.

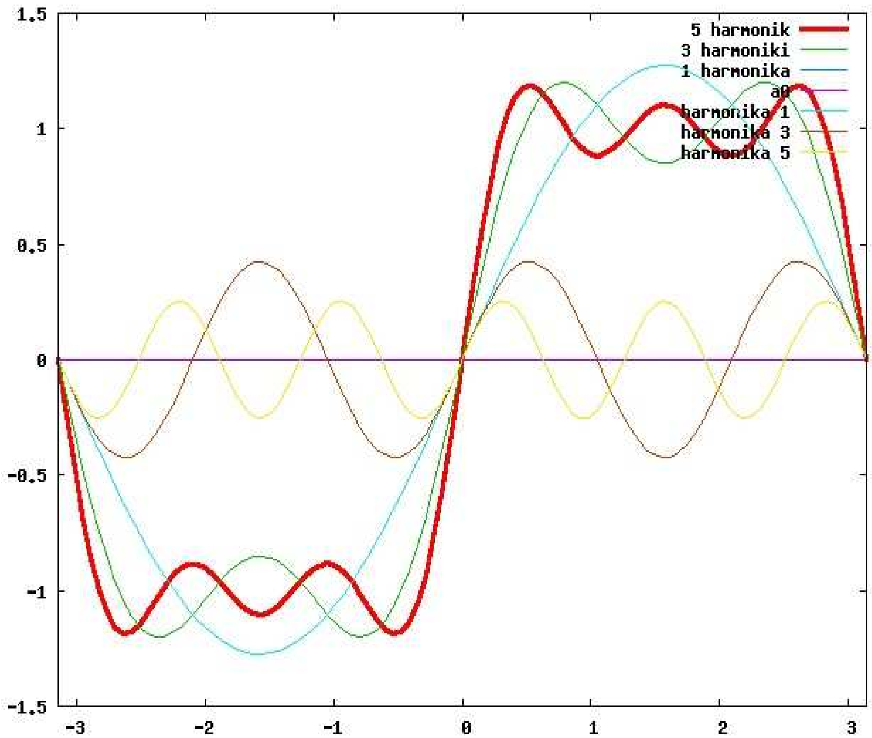
Policzmy a_n z definicji:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1 \sin nx dx + \int_0^{\pi} 1 \sin nx dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi\right] \end{aligned} \tag{2}$$

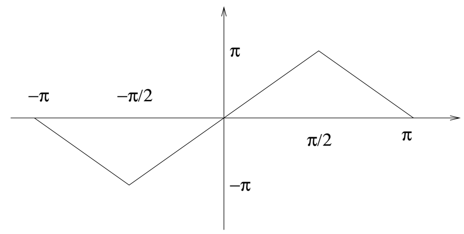
I to wszystko. Po drodze sumę całek zmieniliśmy na całkę pojedynczą ze względu na parzystość wyrażenia podcałkowego. **(Proszę zwrócić uwagę, że wykorzystywanie w tych problemach parzystości i nieparzystości pozwala znacznie zmniejszyć ilość obliczeń, a co za tym idzie, błędów)**. b_n znika z nieparzystości, a a_0 jest równe zeru, bo funkcja jest nieparzysta (więc wartość średnia w symetrycznym przedziale jest równa zeru).

1a:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+\pi) & \text{dla} \quad -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -(x-\pi)\text{dla} & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \tag{3}$$



Rysunek 1: Wykres do ilustracji



Rysunek 2: Zadanie 2a

Z rysunku 2 widać, że badana funkcja jest *nieparzysta*, więc współczynniki cosinusowe a_n będą zerowe. Obliczmy b_n:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
\pi b_n &= -\int_{-\pi}^{-\pi/2}(x+\pi)\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx - \int_{\pi/2}^{\pi}(x-\pi)\sin nx dx
\end{aligned}
$$

W trzeciej całce można użyć podstawienia $t = -x$, $dt = -dx$, a z nieparzystości, $sin(x) = sin(-t) = -sin(t)$. W ten sposób,

$$
\begin{aligned}
\pi b_n &= -\int_{-\pi}^{-\pi/2}(x+\pi)\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx - \int_{-\pi/2}^{-\pi} -(t+\pi)(-\sin nt)(-dt) \\
\pi b_n &= -\int_{-\pi}^{-\pi/2}(x+\pi)\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{-\pi}(t+\pi)\sin nt dt
\end{aligned}
$$

Korzystając z twierdzenia o zamianie znaku przy odwróceniu granic całkowania w całce oznaczonej,

$$
\pi b_n = -\int_{-\pi}^{-\pi/2}(x+\pi)\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx - \int_{-\pi}^{-\pi/2}(t+\pi)\sin nt dt
$$

Pierwsza i trzecia całka oznaczona są teraz identyczne (różnią się tylko niemym parametrem t lub x) - można je wysumować:

$$
\pi b_n = -2\int_{-\pi}^{-\pi/2}(x+\pi)\sin nx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx
$$

Dalej będzie potrzebna nam całka z $x\sin nx$:

$$\int x\sin nx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\int \cos nx dx$$
$$= -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx$$

Podstawiamy tę całkę:

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= \frac{2x}{n}\cos nx - \frac{2}{n^2}\sin nx + \frac{2\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{-\pi/2} \\
&\quad -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
\pi b_n &= -\frac{\pi}{n}\cos -n\pi/2 + \frac{2\pi}{n}\cos -n\pi - \frac{2}{n^2}\sin -n\pi/2 + \frac{2}{n^2}\sin -n\pi \\
&\quad +\frac{2\pi}{n}\cos -n\pi/2 - \frac{2\pi}{n}\cos -n\pi \\
&\quad -\frac{\pi/2}{n}\cos n\pi/2 - \frac{\pi/2}{n}\cos -n\pi/2 + \frac{1}{n^2}\sin n\pi/2 - \frac{1}{n^2}\sin -n\pi/2
\end{aligned}$$

Z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa:

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi/2 + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n^2}\sin n\pi/2 - \frac{2}{n^2}\sin n\pi \\
&\quad +\frac{2\pi}{n}\cos n\pi/2 - \frac{2\pi}{n}\cos n\pi \\
&\quad -\frac{\pi/2}{n}\cos n\pi/2 - \frac{\pi/2}{n}\cos n\pi/2 + \frac{1}{n^2}\sin n\pi/2 + \frac{1}{n^2}\sin n\pi/2
\end{aligned}$$

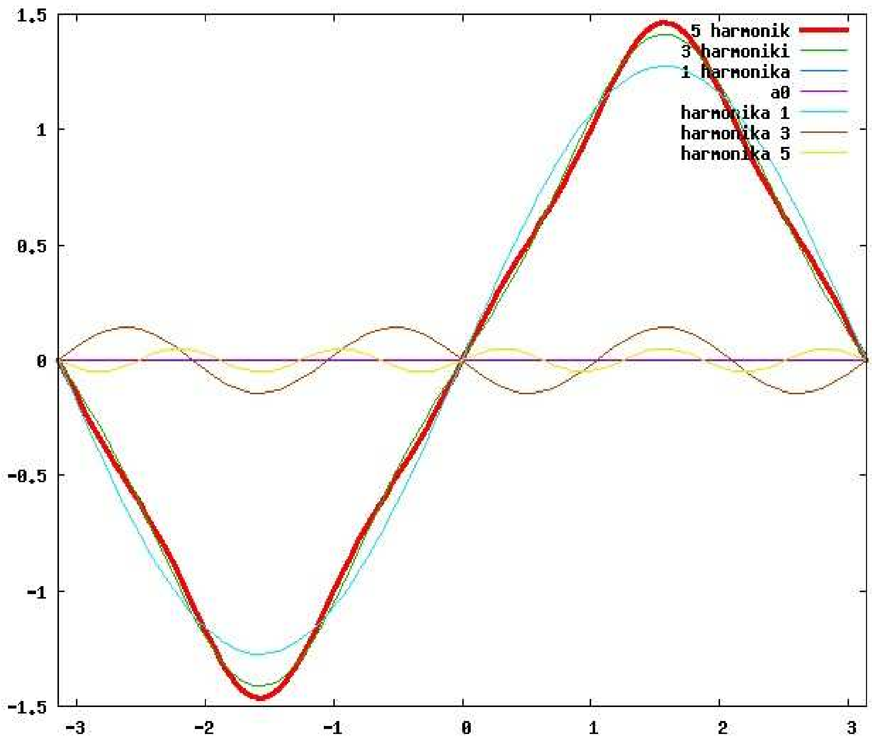
Czynniki z $\cos n\pi/2$ sumują się do zera podobnie czynniki z $\cos n\pi$, $\sin n\pi = 0$. Pozostaje:

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= \frac{4}{n^2}\sin n\pi/2 \\
b_n &= \frac{4}{\pi n^2}\sin n\pi/2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

1b

$$f(x) = x^2, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

Badana funkcja jest parabolą, a więc jest parzysta. Stąd, $b_n = 0$. Przekonajmy się o tym:



Rysunek 3: Wykres 1a

$$
\begin{aligned}
\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx \Bigg| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} x \cos nx dx \Bigg| \begin{array}{ll} u = \frac{2}{n}x & u' = \frac{2}{n} \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n^2}\sin nx dx \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi}
\end{aligned}
$$

Czynniki typu $\sin n\pi = 0$, więc środkowy wyraz się wyzeruje. Pierwszy i ostatni wyraz wyzeruje się z parzystości, pozostaje więc zero, jak powinno dla funkcji parzystej.

Teraz policzymy a_n:

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx \Bigg| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} x \sin nx dx \Bigg| \begin{array}{ll} u = \frac{2}{n}x & u' = \frac{2}{n} \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n^2}\cos nx dx \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx \Bigg|_{-\pi}^{\pi}
\end{aligned}
$$

Tylko środkowy człon nie znika w granicach całkowania, więc

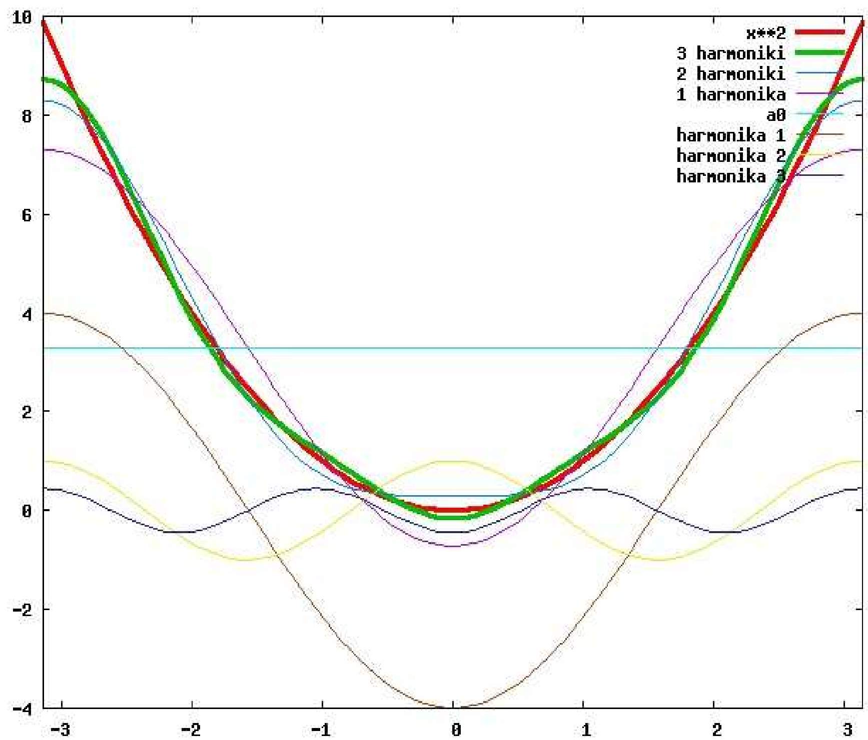
$$a_n = \frac{4}{n^2}\cos n\pi \tag{5}$$

Zostaje jeszcze a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{6\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \tag{6}$$

1c

$$f(x) = x^2, \qquad x \in (0, 2\pi) \tag{7}$$



Rysunek 4: Wykres 1b

Potrzebna będzie a_n i b_n. Potrzebna do tego całka z $x^2 \sin nx$:

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \sin nx dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right] = \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \int \frac{2x}{n}\cos nx dx \\
-\frac{x^2}{n}\cos nx + \int \frac{2x}{n}\cos nx dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \frac{2x}{n} & u' = \frac{2}{n} \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right] = \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx - \int \frac{2}{n^2}\sin nx dx \\
&= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx \qquad (8)
\end{aligned}
$$

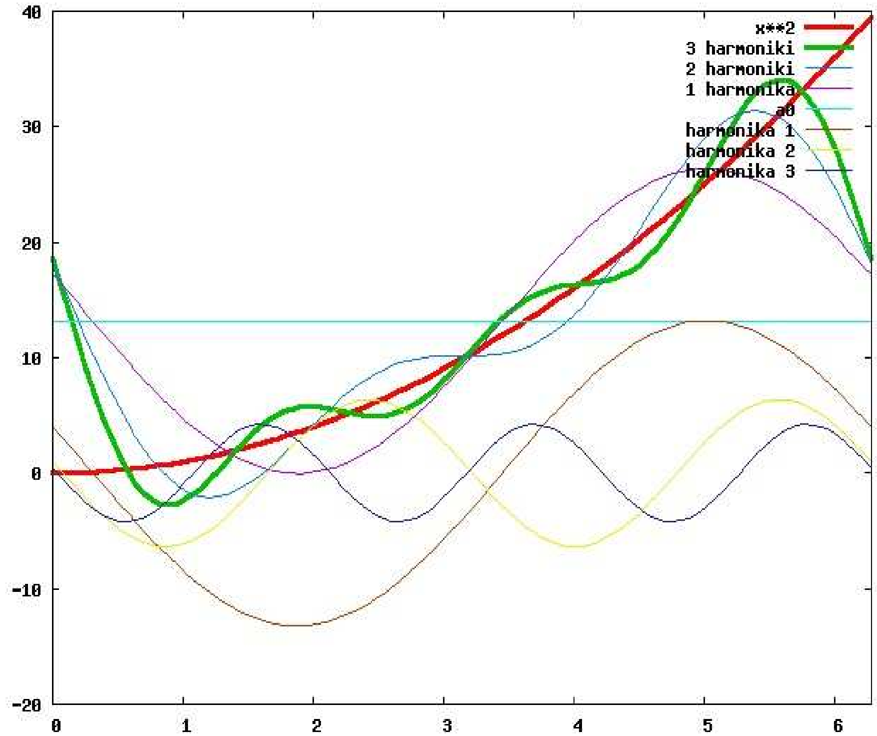
oraz całka z $x^2 \cos nx$:

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos nx dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right] = \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx - \int \frac{2x}{n}\sin nx dx \\
\frac{x^2}{n}\sin nx - \int \frac{2x}{n}\sin nx dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \frac{2x}{n} & u' = \frac{2}{n} \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right] = \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \int \frac{2}{n^2}\cos nx dx \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx \qquad (9)
\end{aligned}
$$

W takim razie,

$$
\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4\pi}{n^2}\cos 2\pi n \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Stąd, $a_n = \frac{4}{n^2}$ (wielokrotność kosinusa z 2π jest równa 1).
Teraz b_n:



Rysunek 5: Wykres 1c

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= -\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi^2}{n}\cos 2\pi n \end{aligned} \tag{11}$$

Stąd, $b_n = -\frac{4\pi}{n}$.
Jeszcze a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{6\pi}x^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^2 \tag{12}$$

1d

$$f(x) = |x|, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

Badana funkcja jest parzysta. Stąd, $b_n = 0$. Policzymy a_n:

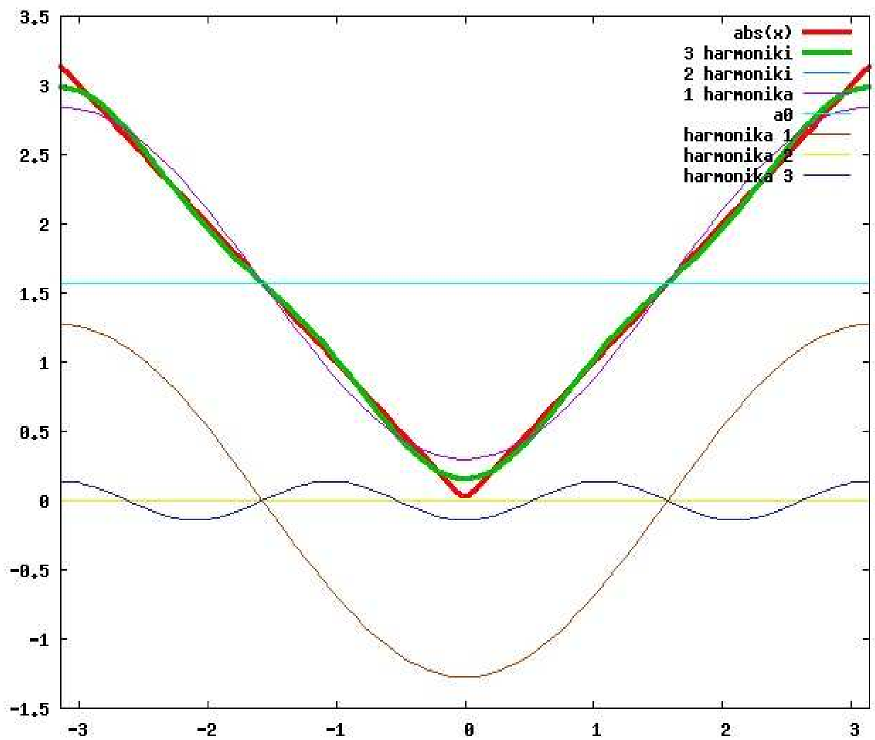
$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx \\
\pi a_n &= 2\int_0^{\pi} x \cos nx dx \Bigg| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \\
&= \frac{2x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin nx dx \\
&= \frac{2x}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} \qquad (13)
\end{aligned}$$

Pierwszy człon znika, bo $\sin n\pi = 0$. Zostaje

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) \qquad (14)$$

Z kolei potrzebne jest jeszcze a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi/2 \qquad (15)$$



Rysunek 6: Wykres 1d