Indukcja matematyczna

Przemysław Borys

28 października 2009

1 Indukcja matematyczna

Załóżmy, że mamy do dyspozycji zdanie $T(n)$, które zależnie od n, należącego do zbioru liczb naturalnych, może być prawdziwe lub fałszywe. [1]

Zgodnie z metodą indukcji matematycznej, można dowieść prawdziwości zdania dla $n \geq n_0$, gdzie n_0 jest pewnym początkowym parametrem n, dla którego zachodzi $T(n)$.

Dowód indukcyjny w indukcji matematycznej można wykonać w następujących krokach:

1. *Sprawdzenie* prawdziwości $T(n_0)$
2. Postawienie *założenia indukcyjnego*: istnieje takie $k \geq n_0$, że zachodzi $T(k)$. [2]
3. Zapisanie *tezy indukcyjnej*[3], którą będziemy dowodzić: jeśli zachodzi dla $T(k)$, to zachodzi również $T(k+1)$.
4. Krok indukcyjny: dowiedzenie implikacji $T(k) \rightarrow T(k+1)$. W tym kroku w tezę próbujemy włączyć założenie indukcyjne i sprawdzamy czy nie prowadzi to do sprzeczności.

[1] Np. obserwowaliśmy jak sumują się kolejne liczby naturalne i zauważyliśmy prawidłowość, którą ubraliśmy we wzór $1+2+...+n = n(n+1)/2$. Nasze „zgadnięcie" chcemy następnie udowodnić.

[2] Uwaga: Założenie indukcyjne stawiamy dla nowej, pewnej liczny naturalnej k, nie dla n. n zdefiniowaliśmy bowiem wcześniej jako dowolną liczbę z dziedziny prawdziwości zdania. Aby uniknąć podwójnych definicji i niejasności, wprowadzamy nową literkę. Przypadkowe zapisanie założenia dla n mogłoby bowiem w skrajnym przypadku zabrzmieć jak: „Załóżmy, że $T(n)$ jest prawdziwe" – przy takim założeniu dowód już nie jest potrzebny...

[3] Określenie „tezy" wydaje się typowo polską nazwą, w literaturze angielskiej nie nazywa się tezy w żaden szczególny sposób.

Przykład: Wykazać, że relacja

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

jest prawdziwa dla dowolnego n z dziedziny liczb naturalnych.

1. *Sprawdzenie* dla $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \tag{2}$$

2. *Założenie indukcyjne*: istnieje takie $k \geq 1$, że

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{3}$$

3. *Teza*:

$$1 + 2 + ... + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{4}$$

4. *Krok indukcyjny*: Sumę $1 + ... + k$ z *tezy* zastępujemy *założeniem indukcyjnym*:

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && (5) \\ \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && (6) \\ \frac{(k+1)(k+2)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} && (7) \\ L &= P && (8) \end{aligned}$$

CND.

2 Indukcja zupełna

O ile w indukcji matematycznej wykazujemy prawdziwość implikacji $T(k) \rightarrow T(k+1)$, może się zdarzyć, że teza $T(k+1)$ nie zależy wprost od $T(k)$, a zależy większej ilości tez poprzednich. Jako przykład można podać liczby Fibonacciego F, definiowane wzorem $F(k+1) = F(k) + F(k-1)$). W tym przypadku, dysponując twierdzeniem $T(k)$ o k-tej liczbie Fibonacciego, musielibyśmy wykazać nie prawdziwość implikacji $T(k) \rightarrow T(k+1)$, ale $T(k-1), T(k) \rightarrow T(k+1)$.

Przypadek indukcji matematycznej, gdzie teza wynika nie tylko z hipotezy dla k, ale z hipotez dla przedziału $< n_0, k >$, nazywamy *indukcją zupełną*.

Przykład: udowodnić, że dowolną liczbę naturalną $n \geq 2$ można wyrazić za pomocą iloczynu liczb pierwszych.

Dowód: Dla $n = 2$, twierdzenie spełnione. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla $n < r$. W kroku indukcyjnym rozpatrujemy więc liczbę naturalną r. Możemy mieć dwa przypadki: jeśli liczba ta należy do zbioru liczb pierwszych, to twierdzenie zachodzi. Jeśli liczba r nie należy do zbioru liczb pierwszych, to jest ona iloczynem dwóch liczb mniejszych od r. Ale *na mocy założenia indukcji zupełnej*, wszystkie liczby mniejsze od r można wyrazić iloczynem liczb pierwszych! Wykazaliśmy zatem prawdziwość kroku indukcyjnego: z założenia (tym razem zupełnego) wynika teza.

3 Literatura

1. W. Żakowski, Matematyka dla kandydatów na wyższe uczelnie, WNT, 1994.

2. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, G. Musiol, H. Muehlig, Nowoczesne kompendium matematyki, PWN, 2004.

3. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, t.1, PWN, 1998.

4. G. Smith, Introductory mathematics, algebra and analysis, Springer, 1998.

5. E. Gossett, Discrete Mathematics with Proof, Wiley, 2009.

6. I. S. Sominskii, The Method of Mathematical Induction, Blaisdel Publishing Company, 1969.

7. Wikipedia: mathematical induction, complete induction

8. Wikipedia: indukcja matematyczna