Jak działa jakobian przy zamianie zmiennych w całce podwójnej?

Przemysław Borys

6 czerwca 2012

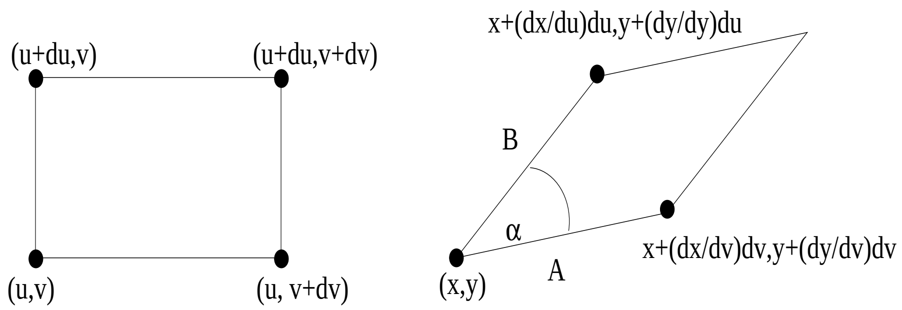
1 Współrzędne krzywoliniowe

Gdy całkujemy coś w zmienionych współrzędnych (u, v) zamiast (x, y), to iloczyn $dudv$ odpowiada prostokątowi na płaszczyźnie (u, v), natomiast na płąszczyźnie (x, y) jest to w ogólności jakiś równoległobok (rys. 1).

Należy zadać pytanie: jakiemu polu powierzchni we współrzędnych (x, y) odpowiada iloczyn $dudv$? Jest to pole równoległoboku, dane wzorem: podstawa razy wysokość. Za podstawę równoległoboku możemy wybrać sobie jeden z boków, np. dolny, A, ale wysokości nie mamy. Można ją jednak policzyć za pomocą funkcji trygonometrycznych. Bok B mnożony przez $sin(\alpha)$ daje właśnie wysokość, dlatego:

$$dS = Ah = ABsin(\alpha) = |A \times B| \tag{1}$$

Ostatnia równość wynika z definicji modułu iloczynu wektorowego, w której mnożymy moduł jednego wektora razy moduł drugiego wektora razy



Rysunek 1: Zmiana kształtu infinitezymalnego pola całkowania podczas zamiany zmiennych

sinus kąta między nimi. Ale iloczyn wektorowy można również policzyć wyznacznikowo:

$$dS = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Ponieważ składowa z ma wartość zero, wynik będzie miał tylko składową k, której moduł to (por. rozwinięcie Laplace'a):

$$dS = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} dudv \tag{3}$$

Oto i pojawił się jakobian jako mnożnik dla $dudv$, umożliwiający przeliczenie tego iloczynu na faktyczne pole powierzchni we współrzędnych (x, y).