Parę informacji o logarytmach

Przemysław Borys

4 października 2009

1 Logarytm a potęgowanie

Jeśli mamy do dyspozycji operację potęgowania, $a^b = c$, możemy postawić pytanie: do jakiej potęgi należy podnieść a aby uzyskać wartość c? Odpowiedź na to pytanie daje logarytm, $b = \log_a c$. W związku z tym często logarytm definiujemy jako

$$\log_a c = b \leftrightarrow a^b = c \tag{1}$$

Ta definicja nakłada pewne ograniczenia na wartości argumentu i podstawy logarytmu. Zastanówmy się najpierw nad podstawą. Gdyby przyjąć $a = 1$, to dla $c = 1$, b może mieć wartość dowolną. Nie jest to zatem *funkcja*, gdzie jednemu argumentowi musi odpowiadać tylko jedna wartość. Podobna sytuacja jest dla $a = 0$, $c = 0$ z poprawką na ewentualne trudności związane z dzieleniem przez zero przy ujemnych wykładnikach b.

Co stałoby się natomiast gdyby przyjąć $a < 0$? Wówczas, gdybyśmy obrali b jako liczbę całkowitą, wszystko jest w porządku. Jednak przyjmując b ułamkowe, dopuszczamy *pierwiastkowanie* podstawy logarytmu! Np. dla $a = -2$, $b = 0.5$, mamy $c = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$. Wchodzimy zatem w dziedzinę liczb zespolonych. Aby tego uniknąć, pozostawiamy $a > 0$.

Kolejne ograniczenie logarytmu tyczy jego argumentu. Jeśli $a > 0$, $a \neq 1$, to $c > 0$. c musi być nieujemne, bo nie sposób uzyskać ujemnej liczby potęgując dodatnią podstawę. Ponadto, $c \neq 0$, bo aby uzyskać 0 z dodatniej podstawy, należałoby ją podnieść do nieskończonej (jeśli $a < 1$) lub minus nieskończonej (jeśli $a > 1$) potęgi! Nieskończoność nie jest jednak liczbą, a symbolem nieoznaczonym. Dlatego zero musimy również wyłączyć z dziedziny logarytmu.

2 * Logarytm zespolony

Panaceum na problemy związane z dziedziną logarytmu definiowanego w liczbach rzeczywistych jest logarytm zespolony (o podstawie e). Dla zadanej liczby $z = re^{i\theta}$ (o liczbach zespolonych będziemy się uczyć w następnym semestrze), logarytm oznaczamy jako $logz = logr+i\theta$. Co ciekawe, rozwiązaniem równania definiującego logarytm są czynniki urojone wielkości $i(\theta + 2k\pi)$, a więc w ciele liczb zespolonych logarytm nie jest zdefiniowany jednoznacznie, o czym należy pamiętać.

3 Tożsamości logarytmiczne

Znamy trzy podstawowe tożsamości logarytmiczne:

$$\log_a c_1 + \log_a c_2 = \log_a c_1 c_2 \tag{2}$$

$$\log_a c_1 - \log_a c_2 = \log_a \frac{c_1}{c_2} \tag{3}$$

$$\log_a c^k = k \log_a c \tag{4}$$

Tożsamości łatwo udowodnić z definicji logarytmu. Zaczniemy od dwóch pierwszych. Zdefiniujmy pomocnicze liczby b_1, b_2 i c_1, c_2 dla logarytmu o podstawie a:

$$\log_a c_1 = b_1 \quad \leftrightarrow \quad a^{b_1} = c_1 \tag{5}$$

$$\log_a c_2 = b_2 \quad \leftrightarrow \quad a^{b_2} = c_2 \tag{6}$$

Mnożąc przez siebie równości po prawej stronie ekwiwalencji, dostajemy

$$a^{b_1} a^{b_2} = c_1 c_2 \tag{7}$$

$$a^{b_1 + b_2} = c_1 c_2 \tag{8}$$

logarytmując ostatnią równość (wykorzystując definicję logarytmu o związku wykładnika, podstawy i wyniku potęgowania), dostajemy

$$\log_a c_1 c_2 = b_1 + b_2 \tag{9}$$

$$\log_a c_1 c_2 = log_a c_1 + \log_a c_2 \tag{10}$$

wykorzystaliśmy tu definicje b_1 i b_2 z początku rozumowania. Podobnie dowodzimy tożsamości na różnicę logarytmów z tym, że zamiast mnożyć równości potęgowe, dzielimy je przez siebie:

$$\frac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = \frac{c_1}{c_2} \tag{11}$$

$$a^{b_1 - b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{12}$$

znów logarytmujemy i podstawiamy za b_1 i b_2:

$$\log_a \frac{c_1}{c_2} = b_1 - b_2 \tag{13}$$

$$\log_a \frac{c_1}{c_2} = log_a c_1 - \log_a c_2 \tag{14}$$

Teraz wykażemy relację $\log_a c^k = k \log_a c$. Zaczynamy od definicji logarytmu

$$\log_a c = b \leftrightarrow a^b = c \tag{15}$$

Teraz relację $a^b = c$ potęgujemy do potęgi k. dostajemy $a^{bk} = c^k$. Z definicji logarytmu, jest to równoważne $\log_a c^k = bk$. Ponieważ napisaliśmy powyżej definicję $b = \log_a c$, to podstawiając teraz uzyskujemy

$$\log_a c^k = k \log_a c \tag{16}$$

4 Zmiana bazy logarytmu

Często zdarza się sytuacja, że chcemy policzyć logarytm o pewnej podstawie a_2, dysponując możliwością obliczenia logarytmu o innej podstawie - a_1. Można poradzić sobie za pomocą relacji:

$$\log_{a_2} c = \frac{\log_{a_1} c}{\log_{a_1} a_2} \tag{17}$$

Można to wprowadzić następująco. Interesuje nas relacja:

$$a_2^b = c \leftrightarrow \log_{a_2} c = b \tag{18}$$

Możemy wyrazić a_2 za pomocą a_1 poprzez relację $a_2 = a_1^{\log_{a_1} a_2}$, uzyskując

$$a_1^{b \log_{a_1} a_2} = c \tag{19}$$

zapisując w postaci logarytmicznej,

$$b \log_{a_1} a_2 = \log_{a_1} c \tag{20}$$

stąd,

$$b = \frac{\log_{a_1} c}{\log_{a_1} a_2} \tag{21}$$

a ponieważ $b = \log_{a_2} c$, to relacja jest dowiedziona.