# Idea dowodu wzoru Picarda

Przemysław Borys

1 kwietnia 2009

## 1 Wzór

Dla równania różniczkowego

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

z warunkiem $y(x_0) = y_0$, mamy rozwiązanie:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \tag{2}$$

## 2 Szkic dowodu

jeśli funkcja $f(x, y)$ jest **ograniczona**, $f(x, y) < M$, można napisać:

$$y_1 - y_0 < M|x_0 - x| \tag{3}$$

Aby z tym wzorem coś móc począć dalej, trzeba go wstawić do równania (2). Ponieważ w ogólności nie wiadomo jaka jest postać $f$, aby coś móc całkować potrzebne jest kryterium Lipschitza, umożliwiające pozbycie się funkcji $f(...)$ i wyrażenie całki za pomocą argumentów tej funkcji. Kryterium Lipschitza mówi, że

$$|f(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n) - f(x, y_1, y_2, ..., y_n)| \leq N(|\bar{y}_1 - y_1| + |\bar{y}_2 - y_2| + ... + |\bar{y}_n - y_n|) \tag{4}$$

czyli przy ustalonym $x$, wartość funkcji jest ograniczona różnicami pozostałych argumentów. Innymi słowy, przy skończonej zmianie argumentów, funkcja powinna zmienić wartość o skończony przyrost (nia może się pojawiać rozbieganie do nieskończoności dla tego wyprowadzenia).

Jeśli tak, można napisać:

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1} - y_n| &< \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \\
&< N \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt
\end{aligned} \tag{5}
$$

Tak można obliczyć oszacowanie dla $y_2$:

$$
\begin{aligned}
|y_2 - y_1| &< N \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0| dt \\
&< \int_{x_0}^{x} |M(x - x_0)| dt = \frac{MN(x - x_0)^2}{2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Podstawiając tę różnicę (czyli $|y_2 - y_1|$) w celu obliczenia $|y_3 - y_2|$, dostaniemy

$$
|y_3 - y_2| < \frac{MN^2(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} \tag{7}
$$

i tak dalej,

$$
|y_{n+1} - y_n| < \frac{MN^n(x - x_0)^{n+1}}{n + 1!} \tag{8}
$$

przy odpowiednim doborze stałych $M$, $N$ (wielkość $N$ można zmniejszać poprzez zmniejszanie rozpatrywanego przedziału), szereg tych różnic jest zbieżny, a więc jego suma osiąga wartość, która w granicy $n- > \infty$ przestaje się zmieniać. Innymi słowy, jest **punktem stałym** przekształcenia.

Skądinąd wiadomo też, że punktem stałym jest rozwiązanie równania różniczkowego, gdyż całkowanie pokazuje, że

$$
y' = f(x, y) \tag{9}
$$

$$
y - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt \tag{10}
$$

$$
y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt \tag{11}
$$