Wrońskian, wzór na uzyskiwanie drugiego rozwiązania w ODE 2 rzędu

Przemysław Borys

6 maja 2009

1 Dlaczego Wrońskianem można badać liniową niezależność funkcji?

Weźmy układ n funkcji $f_1 ... f_n$, które są liniowo zależne. Można wówczas (z definicji liniowości) napisać, że można dobrać stałe $\lambda_1 ... \lambda_n$, że

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n = 0 \tag{1}$$

różniczkując to równanie, zachowujemy jego strukturę, tzn. niezmienione współczynniki λ:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n &= 0 \\ \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + ... + \lambda_n f_n' &= 0 \\ &... \\ \lambda_1 f_1^{(}n) + \lambda_2 f_2^{(}n) + ... + \lambda_n f_n^{(}n) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Zapisując ten układ w postaci macierzowej, mamy:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} f_1 \\ f_1' \\ ... \\ f_1^{(}n) \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} f_2 \\ f_2' \\ ... \\ f_2^{(}n) \end{bmatrix} + ... + \lambda_n \begin{bmatrix} f_n \\ f_n' \\ ... \\ f_n^{(}n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Z powyższego zapisu wynika, że wektory kolumnowe f, f', f'', ... $f^{(}n)$ są liniowo zależne. Zatem wyznacznik złożonej z nich macierzy musi być równy zeru.

2 Jak wyprowadzić wzór na drugie rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu

Niech dane będzie równanie:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{4}$$

dla którego znamy jedno rozwiązanie y_1. Chcemy teraz wyznaczyć y_2 w zależności od y_1, $y_2 = my_1$. Podstawimy takie y_2 do równania (4). Aby to uczynić, musimy znać pochodne y_2:

$$\begin{aligned} y_2 &= my_1 && (5) \\ y_2' &= m'y_1 + my_1' && (6) \\ y_2'' &= m''y_1 + 2m'y_1' + my_1'' && (7) \end{aligned}$$

podstawiamy do (4):

$$m''y_1 + 2m'y_1' + my_1'' + p(x)[m'y_1 + my_1'] + q(x)my_1 = 0 \tag{8}$$

porządkujemy wyrazy:

$$m\underbrace{[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]} + m''y_1 + 2m'y_1' + p(x)m'y_1 = 0 \tag{9}$$

część ujęta nawiasem klamrowym równa jest zero, bo spełnia równanie (4). Pozostaje:

$$m''y_1 + 2m'y_1' + p(x)m'y_1 = 0 \tag{10}$$

dzielimy to przez y_1 i m':

$$\frac{m''}{m'} + 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) = 0 \tag{11}$$

widzimy, że w licznikach ułamków są pochodne mianownika, a więc są to pochodne logarytmiczne:

$$[lnm']' + 2[lny_1]' + p(x) = 0 \tag{12}$$

całkujemy:

$$lnm' + 2lny_1 + \int p(x)dx = 0 \tag{13}$$

delogarytmujemy

$$m' y_1^2 = e^{-\int p(x) dx} \tag{14}$$

i drugi raz całkujemy by wyznaczyć m:

$$m = \int y_1^{-2} e^{-\int p(x) dx} dx \tag{15}$$

stąd, $y_2 = m y_1$,

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int p(x) dx} dx \tag{16}$$