Skąd się wzięły wyznaczniki?

Przemysław Borys

29 lutego 2012

1 Definicja permutacyjna

Dawno temu, Chińczycy, a potem matematycy europejscy (głównie Cramer) zastanawiali się nad następującym problemem: kiedy układ równań posiada rozwiązanie? Szukano jakiejś charakterystyki, którą można policzyć dla układu równań, która odpowiadałaby na to pytanie.

Oczywiście najszybciej zaproponowano formuły dla układów równań z dwiema niewiadomymi, ale udało się to później uogólnić. Wprowadzono pojęcie wyznacznika, definiowanego następująco:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S} (-1)^{inv(\sigma)} A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} ... A_{\sigma(n),n} \tag{1}$$

Gdzie S oznacza zbiór $n!$ permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, σ jest permutacją w tym zbiorze, $inv()$ jest funkcją mówiącą ile przestawien oryginalnego zbioru należy wykonać aby uzyskać σ.

Z kolei $A_{i,j}$ to współczynniki układu równań,

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + ... + A_{1,n}x_n = B_1 \\ ... \\ ... \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + ... + A_{n,n}x_n = B_n \end{cases} \tag{2}$$

który można zapisać w postaci macierzowej,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & ... & A_{1,n} \\ & ... & & \\ & ... & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & ... & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ ... \\ B_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Jak to rozumieć? Wypiszmy wszystkie permutacje np. prostego zbioru $\{1, 2, 3\}$, przestawiając w kolejnych wierszach kolejne symbole (stąd rośnie liczba inwersji):

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3\} \quad inv = 0 \\
&\{1,3,2\} \quad inv = 1 \\
&\{3,1,2\} \quad inv = 2 \\
&\{3,2,1\} \quad inv = 3 \\
&\{2,3,1\} \quad inv = 4 \\
&\{2,1,3\} \quad inv = 5
\end{aligned} \tag{4}$$

2 Czy rzeczywiście to mówi o istnieniu rozwiązania?

Aby istniało rozwiązanie układu równań o n niewiadomych, musimy mieć n różnych równań na te niewiadome. Aby równania były różne, musi być spełniony warunek liniowej niezależności równań. Równanie n jest liniowo zależne od pozostałych $n-1$ równań jeśli:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k A_k \tag{5}$$

Gdzie A_k oznacza wektor współczynników $A_k = [A_{k,1}, A_{k,2}, ..., A_{k,n}]$. Co dzieje się z naszą definicją permutacyjną gdy mamy taką liniową zależność? Podstawmy:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S} (-1)^{inv(\sigma)} A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \dots \cdot \sum_{k=1}^{n-1} A_{\sigma(k),n} \tag{6}$$

Sumę z kombinacji liniowej można wyciągnąć na początek relacji,

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\sigma \in S} (-1)^{inv(\sigma)} A_{\sigma(1),1} A_{\sigma(2),2} \dots A_{\sigma(k),n} \tag{7}$$

No i to wszystko co należało pokazać. Dlaczego? Otóż: w iloczynie permutacyjnym występują zawsze dwa identyczne wyrazy z tego samego wiersza współczynników: $A_{\sigma(k),k}$, $A_{\sigma(k),n}$. Co z tego? jeśli wyliczymy wszystkie permutacje wskaźników, to każdemu układowi $\sigma(1)\sigma(2)...\sigma(k)...\sigma(n)$ odpowiada układ wskaźników $\sigma(1)\sigma(2)...\sigma(n)...\sigma(k)$ o przeciwnym znaku! Stąd, każda permutacja ma swoją „antypermutacje” i wszystkie sumują się do zera! To główna idea tej definicji i główna siła w zastosowaniu do badania liniowej niezależności układu równań.

3 A co z definicją Laplace'a? (trudne)

Definicja Laplace'a jest naturalnym rozwinięciem koncepcji definicji permutacyjnej wyznacznika. Aby uzyskać wszystkie permutacje dla n-wymiarowego układu równań, możemy rozpatrzyć redukcję do $n-1$ wymiarów. Np. weźmy układ o $n = 4$. Wówczas, mamy permutacje ciągu $\{1, 2, 3, 4\}$. Widać, że pierwszy wiersz może być wybrany odpowiednio jako $1\{2, 3, 4\}$, $2\{1, 3, 4\}$, $3\{1, 2, 4\}$, $4\{1, 2, 3\}$. Odpowiada temu 0, 1, 2, 3 inwersji. Zauważ, że ciągi za wybraną pierwszą cyfrą są uporządkowane, jak w podwyznacznikach Laplace'a.

Aby z tych 4 możliwych kombinacji uzyskać wszystkie możliwe permutacje, należy wymnożyć permutację związaną z pierwszą cyfrą przez permutacje doklejonych do niej trójek. To jest dokładnie schemat Laplace'a rozwijania względem pierwszej kolumny.

4 Własności wyznaczników

Z definicji permutacyjnej natychmiast wynika, że zamiana w wyznaczniku kolumn lub wierszy prowadzi do wprowadzenia pojedynczej inwersji do permutacji (np. ciąg $\{1, 2, 3, 4\}$ po zamianie wierszy 2 i 3 zmieni się w $\{1, 3, 2, 4\}$). Stąd, znak wyznacznika zmienia się na ujemny po takiej operacji.

Z kolei pomnożenie wyznacznika przez stałą (w myśl definicji permutacyjnej) może odpowiadać pomnożeniu przez stałą dowolnego wiersza lub kolumny macierzy współczynników. Wynika to wprost z tego, że w sumie permutacyjnej występują iloczyny, w których zawsze znajduje się jeden element z każdego wiersza/kolumny.

Wyznacznik macierzy, w którym do wiersza/kolumny dodaje się kombinację liniową pozostałych wierszy/kolumn pozostaje niezmieniony. Wynika to z rozumowania przedstawionego przy paragrafie o istnieniu rozwiązania układu równań. Czynniki będące kombinacjami liniowymi sumują sie do zera i nie dają wkładu do wyznacznika.