Jak działają kryteria zbieżności szeregów

Przemysław Borys

6 grudnia 2008

1 Wstęp

Prezentowane tu podejścia opierają się na pewnych dowodach, lecz autorowi nie chodziło o zupełną ścisłość, a raczej o zrozumienie idei, co jest najważniejsze dla zajęć ćwiczeniowych. Jednak takie podejście może byc niewystarczające na egzaminie, gdzie dowody powinny być formalne. Mimo to, uważam, że gdy zrozumie się już główną ideę, obłożenie jej odpowiednimi założeniami matematycznymi jest znacznie łatwiejsze.

2 Kryterium d'Alemberta i Cauchy'ego

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego sprowadzają się do badania pewnej granicy, oznaczanej literką q:

$$q_A = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{1}$$

dla kryterium d'Alemberta oraz

$$q_C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \tag{2}$$

dla kryterium Cauchyego. Gdy $q < 1$, szereg jest zbieżny, gdy $q > 1$, rozbieżny, dla $q = 1$ kryterium nie daje odpowiedzi. W przypadku kryterium d'Alemberta, zauważmy, że możemy napisać dla dostatecznie dużego n, że $x_{n+1} = qx_n$ (mnożymy (1) przez x_n). Wobec tego, szereg można zapisać jako:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + ... \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + qx_n + qx_{n+1} + qx_{n+2} + ... \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + qx_n + q^2x_n + q^2x_{n+1} + ... \tag{5}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + qx_n + q^2x_n + q^3x_n + ... \tag{6}$$

Widzimy w ostatniej linijce, ze począwszy od x_n szereg staje się podobny do szeregu geometrycznego o postępie q. Stąd właśnie wnioskujemy o jego zbieżności zależnie od wartości q. Dokładny dowód bardziej delikatnie obchodzi się z pojęciem granicy, lecz idea jego jest taka sama.

Spójrzmy teraz na kryterium Cauchy'ego. Załóżmy, że szereg dla dostatecznie dużych n podobnie jak poprzednio staje się podobny do szeregu geometrycznego; wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_0 q^n} = \lim_{n\to\infty} q \sqrt[n]{x_0} = q \tag{7}$$

mamy zatem znów w wyniku postęp q szeregu geometrycznego. Stąd też kryterium Cauchy'ego „działa” z taką samą skutecznością jak kryterium d'Alemberta.

3 Kryterium porównawcze

W tym kryterium o zbieżności szeregu x_n mówimy wówczas, gdy możliwe jest ograniczenie go od góry szeregiem *zbieżnym* o wyrazach większych

$$\forall_{n>n_0} y_n >= x_n \tag{8}$$

tzn. *majorantą*. Z kolei rozbieżność wykazujemy wówczas, gdy możliwe jest ograniczenie szeregu x_n od dołu szeregiem *rozbieżnym* o wyrazach mniejszych,

$$\forall_{n>n_0} z_n <= x_n \tag{9}$$

tzn. *minorantą*.

Jednym z ważniejszych szeregów o znanej zbieżności, z którym dokonujemy porównań, jest szereg *harmoniczny*,

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n^r} \tag{10}$$

Szereg ten jest rozbieżny dla $r = 1$, co wykazujemy następująco, konstruując minorantę:

$$\begin{aligned}
\sum u_n &= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + .. + \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + .. + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + ... + \frac{1}{10000} + ... && (11)\\
\sum u_n &> 1 + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + .. + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + .. + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + ... + \frac{1}{10000} + && (12)\\
\sum u_n &> 1 + \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} + \frac{9000}{10000} + ... && (13)\\
\sum u_n &> 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + ... && (14)
\end{aligned}$$

Szereg ten w oczywisty sposób jest rozbieżny, gdyż składa się z nieskończonej sumy skończonych elementów, a wyraz ogólny nie dąży w nim do zera (warunek konieczny zbieżności).

Z kolei dla $r > 1$, szereg staje się zbieżny. Wykażemy to, stosując majorantę zbieżną:

$$\sum u_n = 1 + \frac{1}{2^r} + ... + \frac{1}{9^r} + \frac{1}{10^r} + .. + \frac{1}{99^r} + \frac{1}{100^r} + .. + \frac{1}{999^r} + \frac{1}{1000^r} + ... + \frac{1}{9999^r} + ... \tag{15}$$

$$\sum u_n < 1 + 1 + ... + 1 + \frac{1}{10^r} + .. + \frac{1}{10^r} + \frac{1}{100^r} + .. + \frac{1}{100^r} + \frac{1}{1000^r} + ... + \frac{1}{1000^r} + ... \tag{16}$$

$$\sum u_n < 9 + \frac{90}{10^r} + \frac{900}{100^r} + \frac{9000}{1000^r} + ... \tag{17}$$

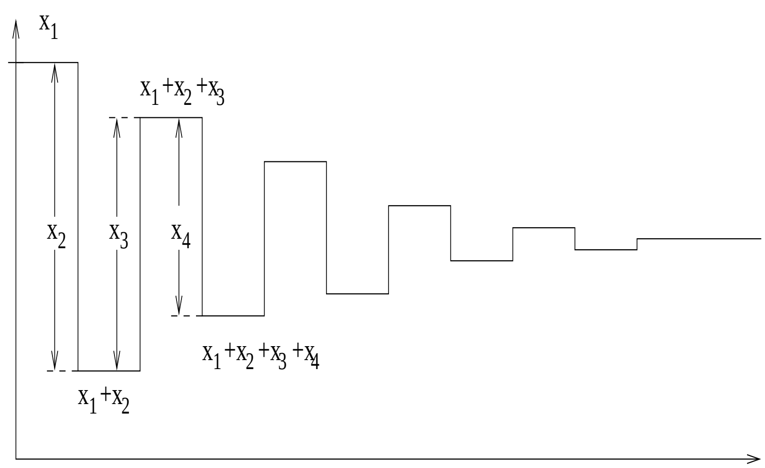
$$\sum u_n < 9\left[1 + \frac{10}{10^r} + \frac{100}{100^r} + \frac{1000}{1000^r} + ...\right] \tag{18}$$

$$\sum u_n < 9\left[1 + \frac{1}{10^{r-1}} + \frac{1}{100^{r-1}} + \frac{1}{1000^{r-1}} + ...\right] \tag{19}$$

W ostatnim kroku dostaliśmy szereg geometryczny o postępie $q = \frac{1}{10^{r-1}}$. Naturalnie, gdy $q < 1$, szereg jest zbieżny, a więc $\frac{1}{10^{r-1}} < 1$ daje $10^{r-1} > 1$, a to z kolei $r - 1 > 0$ czyli $r > 1$. CBDO.

4 Zbieżność szeregu przemiennego malejącego

Jeśli szereg ma wyrazy, których moduł maleje, a dodatkowo mają naprzemiennie znak dodatni i ujemny, to taki szereg jest zbiezny. Ilustruje to rysunek



Rysunek 1: Szereg naprzemienny. Kolejne wyrazy sa mniejsze od poprzednich (sa oznaczone na pionowych liniach). Z kolei kolejne sumy częściowe są na wykresie liniami poziomymi. Z konstrukcji rysunku widać, że zbiega on do stałej wartości znajdującej się pomiędzy x_1 a 0.