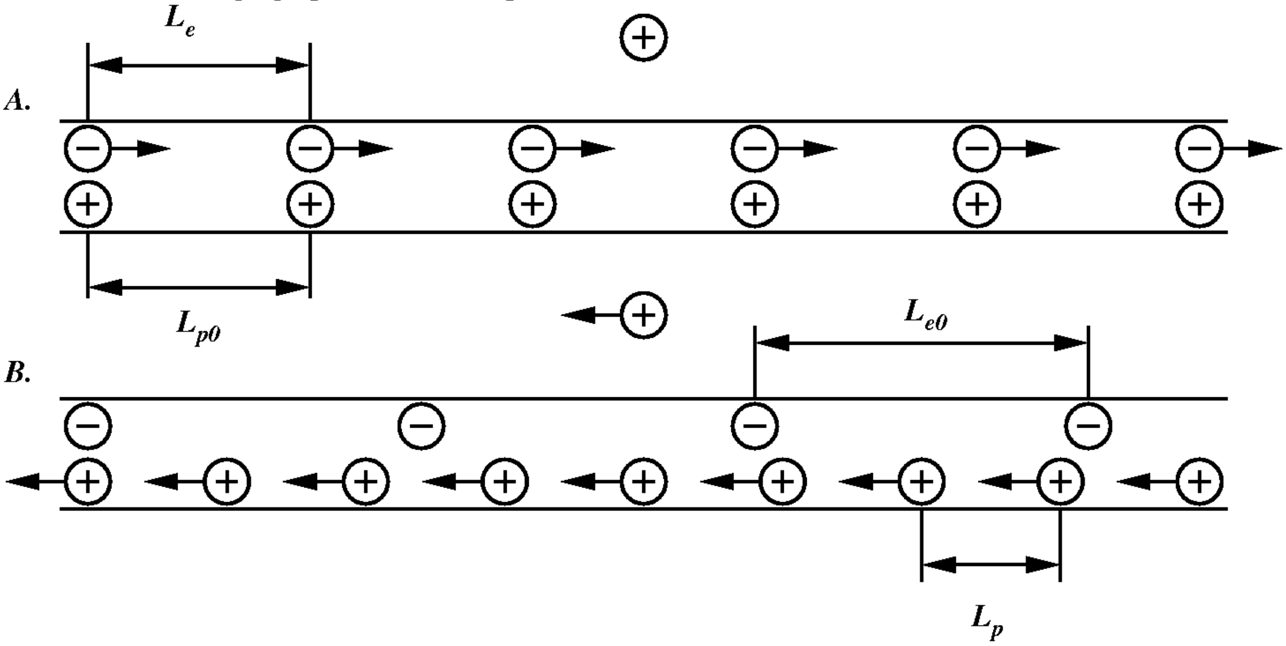
Jak wyprowadzić magnetyzm z prawem Biota-Savarta z prawa Coulomba i relatywistyki?
Przemysław Borys

Wstęp
Czy pole magnetyczne i siła Lorenza są samodzielnymi zjawiskami przyrody, czy też występują one w ścisłym związku z oddziaływaniami elektrycznymi? Czy jedno może istnieć bez drugiego? Czy zastanawialiście się kiedyś jak wyprowadzić prawo Biota-Savarta z równań Maxwella, skoro zapisana jest w nich cała teoria elektromagnetyzmu? Zanim zajmiemy się rachunkami, zilustrujemy jakościowo sposób pojawiania się i znikania oddziaływań magnetycznych na prostym przykładzie nieskończenie długiego przewodnika z prądem.



Na rysunku A widzimy, elektroneutralny przewodnik z prądem (w którym elektrony poruszają się przeciętnie z lewa na prawo), obok którego spoczywa próbny ładunek dodatni. Na ten ładunek wypadkowo nie działa żadna siła i spoczywa on nieruchomo w miejscu. Sytuacja jednak ulega zmianie kiedy spojrzymy na nią z układu odniesienia, związanego z elektronem. Zajdą bowiem transformacje relatywistyczne odległości. I tak, elektrony, które poprzednio były w ruchu, teraz spoczywają i zgodnie ze skróceniem Lorentza, odległość między nimi wzrośnie:

$$L_{e0}=\frac{L_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Z kolei odległość między protonami, które poprzednio były nieruchome, a teraz poruszają się z prędkością v będzie mniejsza i wyniesie:

$$L_p=L_{p0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Sytuację z punktu widzenia elektronu obrazuje rysunek *B* powyżej. W konsekwencji materia rozpatrywanego przewodnika zawiera większą gęstość protonów, a mniejszą elektronów. Przewodnik stałby się naładowany dodatnio i mógłby odpychać próbne ładunki dodatnie z otoczenia. A więc z tego punktu widzenia próbny ładunek dodatni, który spoczywał poprzednio obok przewodnika, poddany byłby sile i musiałby się poruszać ruchem przyspieszonym.

Powstaje pytanie: który opis jest prawidłowy? Ten, w którym przewodnik jest elektroneutralny czy ten, w którym odpycha próbne ładunki dodatnie? Odpowiedź jest prosta: opis zjawisk fizycznych we wszystkich układach odniesienia musi dawać takie same przewidywania. Ponieważ przedstawione powyżej przewidywania są rozbieżne, wnioskujemy stąd, że opis zjawiska jest niekompletny. „Coś” dzieje się z oddziaływaniem kulombowskim podczas relatywistycznych zmian układu odniesienia. To coś to pojawienie się oddziaływań magnetycznych i siły Lorentza

$$\vec{F}=I\,\vec{L}\times\vec{B}=q\,\vec{v}\times\vec{B} \quad (1).$$

W naszym przypadku, prąd w przewodniku płynie w lewo, co daje koncentryczne linie pola magnetycznego wokół niego, skierowane zgodnie z regułą prawej dłoni w głąb kartki na wysokości ładunku próbnego. W tej sytuacji, zgodnie z regułą prawej ręki, siła Lorentza działa w kierunku przewodnika, kompensując odpychanie jednoimiennych ładunków. Okazuje się, że siła Lorentza pojawia się podczas relatywistycznej transformacji siły Coulomba[1]:

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|r|^3}\vec{r} \quad (2)$$

do ruchomego układu odniesienia. Wówczas ładunek zaczyna się poruszać, można z nim związać prąd, a pole magnetyczne pojawia się w postaci całki wyrażanej prawem Biota Savarta, które wyprowadzić można właściwie tylko na gruncie relatywistyki.

W poniższych rozważaniach oczywiście nie będziemy rozpatrywali zaawansowanej relatywistyki z jej rozwiniętym aparatem matematycznym, obejmującym tensor pola elektromagnetycznego itp. Chcę to opisać w sposób możliwie zrozumiały dla szerokiej rzeszy czytelników[2] i potraktujemy sprawę po „inżyniersku”, gdzie dynamikę można w najbardziej uproszczony sposób rozpatrywać za pomocą relacji

$$\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt} \quad (3)$$

Przy czym pęd $\vec{p}=m_v\vec{v}$, a $m_v=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ jest „masą relatywistyczną” (niezbyt lubianą przez fizyków, bo masa powinna odzwierciedlać nie tylko bezwładność ciała—jak masa relatywistyczna, ale również jego oddziaływanie grawitacyjne—czego masa relatywistyczna nie robi we właściwy sposób). Niemniej, jest to jeden ze sposobów na opis dynamiki relatywistycznej, który nie wymaga angażowania zaawansowanego aparatu matematycznego i dlatego się nim posłużymy.

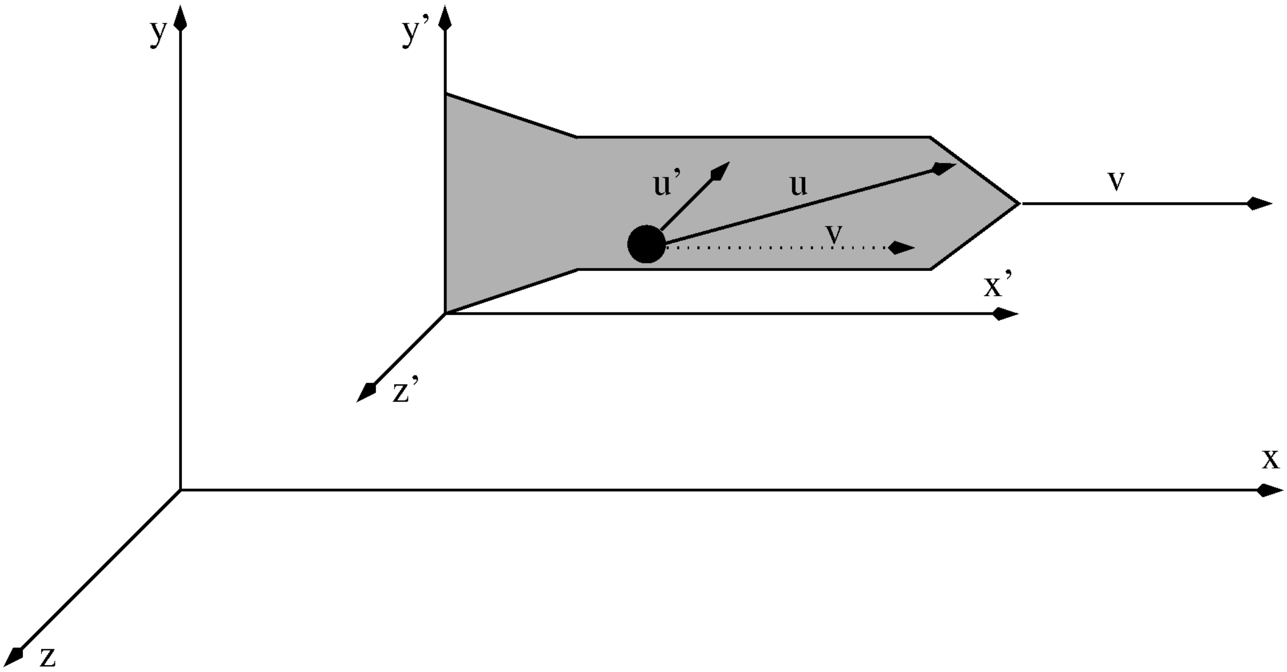
W drodze do transformacji sił

Skoro chcemy zobaczyć, jak zachowuje się prawo Coulomba poddane transformacji do ruchomego układu odniesienia, musimy wyznaczyć relacje na takie przekształcenia. Skoro siła to pochodna pędu, a pęd to iloczyn masy relatywistycznej i prędkości, potrzebujemy wyprowadzić relacje na masę relatywistyczną poruszającego się obiektu w układzie primowanym (układ porusza się z prędkością v, a obiekt w tym układzie porusza się z prędkością u', np. widziany na pokładzie rakiety) względem masy relatywistycznej tego samego obiektu w układzie nieprimowanym (gdzie porusza się z prędkością u, np. względem Ziemi, z której obserwujemy rakietę, rys. poniżej). Podobnie, potrzebujemy relacji na wyrażanie prędkości w układzie ruchomym za pomocą prędkości

1 Która, nawiasem mówiąc, wynika wprost z prawa Maxwella na dywergencję pola elektrycznego ładunku o symetrii sferycznej. W ten sposób uzyskujemy związek tych równań z prawami Maxwella.

2 Zrozumiały: czyli odwołujący się do ogólnodostępnej wiedzy. Niestety mimo że stosunkowo zrozumiałe, rachunki są długie i wymagają skupienia. Matematyczny poziom tego tekstu powinien być osiągalny nawet dla licealisty, któremu zalecam nie przejmowanie się symbolami pochodnych „d” i traktowanie ich jak przyrostów „Δ”, bo nie ma w tekście żadnych zaawansowanych technik różniczkowych.

w układzie nieruchomym.



Zaczniemy od tego drugiego, bo transformacja prędkości (wyprowadzana często dla przypadku jednowymiarowego w typowych kursach fizyki) przyda nam się do transformacji masy relatywistycznej. Aby dojść do transformacji prędkości, zaczynamy od transformacji Lorentza, w których dla uproszczenia „czynnik relatywistyczny” oznaczymy przez $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ i przyjmiemy, że ruchomy okład odniesienia porusza się z prędkością $\vec{v}=[v,0,0]$ (zbliża się do nieruchomego od ujemnych wartości x-ów), a więc dobieramy układ współrzędnych w taki sposób, że prędkość *v* posiada tylko składową x-ową. Wówczas mamy (transformacje Lorentza):

$$\begin{aligned} x'&=\gamma(x-vt)\\ y'&=y\\ z'&=z\\ t'&=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

które możemy wyrazić dla przyrostów jako:

$$\begin{aligned} dx'&=\gamma(dx-vdt)\\ dy'&=dy\\ dz'&=dz\\ dt'&=\gamma\left(dt-\frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Wyciągając w tych wszystkich relacjach *dt* przed nawias, identyfikując $\frac{dx}{dt}=u_x$, $\frac{dy}{dt}=u_y$,

$\frac{dz}{dt}=u_z$, a potem dokonując dzieleń $\frac{dx'}{dt'}=u'_x$, $\frac{dy'}{dt'}=u'_y$ oraz $\frac{dz'}{dt'}=u'_z$, uzyskujemy:

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}$$
$$u'_y=\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (6)$$
$$u'_z=\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Wiemy już jak zachowuje się wektor prędkości przy przejściu z jednego inercjalnego układu odniesienia do innego. A co dzieje się z masą relatywistyczną? To wymaga niestety trochę więcej wysiłku. Zacznijmy od podstawowej relacji:

$$m_{u'}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \quad (7)$$

W układzie spoczynkowym, masa nie porusza się z prędkością *u'*, lecz z prędkością nietransformowaną *u*, a zatem

$$m_u=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Z czego wyliczamy:

$$m=m_u\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad (9)$$

I podstawiamy do (7):

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \quad (10)$$

Rozbijemy teraz kwadrat wektora *u'*, pamiętając o wzorze na obliczanie długości wektora $|u|$:

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z}{c^2}}} \quad (11)$$

Podstawiając wyprowadzone wcześniej relacje na u' transformowane względem u, dostajemy:

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(u_x-v)^2+\frac{u_y^2}{\gamma^2}+\frac{u_z^2}{\gamma^2}}{c^2\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}}} \quad (12)$$

Co po sprowadzeniu wnętrza dolnego pierwiastka do wspólnego mianownika daje:

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{2\mathrm{u}_x v}{c^2}+\frac{u_x^2 v^2}{c^4}-\frac{u_x^2}{c^2}+\frac{2\mathrm{u}_x v}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}-\frac{u_y^2}{\gamma^2 c^2}-\frac{u_z^2}{\gamma^2 c^2}}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}}} \quad (13)$$

Człony „z dwójką” upraszczają się i zauważamy, że $\frac{u_x^2}{c^2}$ daje się wyjąć przed nawias.

Podstawiamy też $\frac{1}{\gamma^2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$:

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{u_x^2}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{u_y^2}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{u_z^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)^2}}} \quad (14)$$

Teraz zauważamy, że $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{u_x^2}{c^2}+\frac{u_y^2}{c^2}+\frac{u_z^2}{c^2}\right)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{u^2}{c^2}$, wobec czego mamy:

$$m_{u'}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{u^2v^2}{c^4}-\frac{v^2}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)^2}}}=m_u\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=m_u\frac{1-\frac{u_xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad(15)$$

Czyli ostatecznie:

$$m_u'=m_u\gamma\left(1-\frac{u_xv}{c^2}\right)\quad(16)$$

Transformacja siły

Dysponujemy już wzorem na przekształcanie masy i wzorem na przekształcanie prędkości, zatem możemy zapisać siłę w ruchomym układzie odniesienia jako[3]

$$F'=\frac{d\vec{p}'}{dt'}=\frac{d}{dt'}m_{u'}\vec{u}'\quad(17)$$

Po podstawieniu zależności na $m_{u'}$ i na składowe prędkości *u'*, anulują się wzajemnie czyniki $1-\frac{u_xv}{c^2}$ i uzyskamy:

$$F'=\frac{d}{dt'}\left\{m_u\left[\gamma(u_x-v)\hat{i}'+u_y\hat{j}'+u_z\hat{k}'\right]\right\}\quad(18)$$

Gdzie *i', j', k'* to wersory osi *OX, OY, OZ* primowanego układu współrzędnych. Nawias wymnażamy i różniczkujemy, zastępując $\frac{d}{dt'}=\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}$ [4]:

3 Licealistom tutaj pomogę w interpretacji symbolu 'd': tutaj interesuje nas przyrost czasu dt, w którym zachodzi zmiana pędu dp. Ta zmiana pędu może jednak pochodzić od dwóch źródeł: od zmiany masy relatywistycznej—i wówczas pojawi się czynnik dm przy ustalonej wartości u, lub od zmiany prędkości u—i wówczas pojawi się czynnik du, przy ustalonej wartości m. Oczywiście, obydwa przyczynki mogą wystąpić naraz. Symbol d[...]/dt oznacza, że w nawiasie kwadratowym rozpatrujemy jego przyrost w czasie dt.

4 Licealiści mogą to spokojnie przepisać na deltach: $\frac{\Delta}{\Delta t'}=\frac{\Delta t}{\Delta t'}\frac{\Delta}{\Delta t}$.

$$F' = \frac{d}{dt'}\left\{m_u\left[\gamma(u_x - v)\hat{i}' + u_y\hat{j}' + u_z\hat{k}'\right]\right\}$$
$$\vec{F}' = \frac{dt}{dt'}\left\{\left(\gamma\frac{d\,m_u u_x}{dt} - \gamma v\frac{dm_u}{dt}\right)\hat{i}' + \frac{dm_u u_y}{dt}\hat{j}' + \frac{dm_u u_z}{dt}\hat{k}'\right\} \quad (19)$$

Wynik możemy przepisać (pamiętając, że $\vec{p} = m_u\vec{u}$) jako:

$$\vec{F}' = \frac{dt}{dt'}\left\{\left(\gamma\frac{d\,p_x}{dt} - \gamma v\frac{dm_u}{dt}\right)\hat{i}' + \frac{dp_y}{dt}\hat{j}' + \frac{dp_z}{dt}\hat{k}'\right\}$$
$$\vec{F}' = \frac{dt}{dt'}\left\{\left(\gamma F_x - \gamma v\frac{dm_u}{dt}\right)\hat{i}' + F_y\hat{j}' + F_z\hat{k}'\right\} \quad (20)$$

Stosunek *dt'/dt* wyznaczamy z transformacji Lorentza (równania (5), wzór na *dt'*), co daje:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad (21)$$

Po podstawieniu do wzoru na F', uzyskujemy:

$$\vec{F}' = \frac{1}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\left\{\left(F_x - v\frac{dm_u}{dt}\right)\hat{i}' + \frac{F_y}{\gamma}\hat{j}' + \frac{F_z}{\gamma}\hat{k}'\right\} \quad (22)$$

Aby wyeliminować niełądną pochodną po masie, wykorzystujemy wzór Einsteina na energię, z którego odejmując energię ciała nieruchomego od poruszającego się, wyznaczamy energię kinetyczną:

$$E_k = m_u c^2 - m_0 c^2 \quad (23)$$

Pochodna z tego wyraża zmianę masy w czasie za pomocą zmian energii kinetycznej, a zatem za pomocą **mocy**, która jest iloczynem siły i prędkości[5]:

$$\frac{dm_u}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{c^2}P = \frac{1}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{u} = \frac{1}{c^2}\left(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z\right) \quad (24)$$

Podstawiając to do wyrażenia na *F'*, uzyskujemy:

5 Uwaga dla licealistów: człon $m_0 c^2$ ma stałą wartość i dlatego nie daje żadnego wkładu do równania (24). Ponadto c^2 jest tylko współczynnikiem (również o stałej wartości) i można go swobodnie wyciągać przed znak „delty”, dzielić przez niego obustronnie równanie, itp.

$$\vec{F}'=\frac{1}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\left[\left(F_x-\frac{v}{c^2}\left[F_x u_x+F_y u_y+F_z u_z\right]\right)\hat{i}'+\frac{F_y}{\gamma}\hat{j}'+\frac{F_z}{\gamma}\hat{k}'\right] \quad (25)$$

Dysponując już składowymi oryginalnej siły po prawej stronie, chcielibyśmy transformować tylko ją, wyrażając resztę wielkości w „docelowym” układzie primowanym bez konieczności dobierania dalszych danych z układu nieprimowanego. Tak więc wyrazimy teraz prędkości *u* przez wielkości primowane, zgodnie z relatywistycznym składaniem prędkości (wzory (6)).

$$\begin{aligned} u_y&=\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)u'_y \\ u_z&=\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)u'_z \end{aligned} \quad (26)$$

Z tym podstawieniem wyrażenie na składową *x* (wersor $\hat{i}$) siły *F′* przyjmuje postać (u_x upraszcza się bez podstawień z mianownikiem stojącym przed nawiasem, dlatego jego teraz nie przekształcamy):

$$F'_x=F_x-\frac{\gamma v}{c^2}(F_y u'_y+F_z u'_z) \quad (27)$$

Aby wyznaczyć pozostałe składowe siły *F′*, potrzebujemy niestety wyrażenie $\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$ przedstawić za pomocą prędkości primowanej. Ze wzorów (6) na relatywistyczne składanie prędkości mamy kolejno:

$$\begin{aligned} u_x-v&=\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)u'_x \\ u_x&=\frac{v+u'_x}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} \\ u_x&=\frac{c^2(v+u'_x)}{c^2+u'_x v} \end{aligned} \quad (28)$$

Z tego możemy wyznaczyć łatwo czynnik występujący w ułamku, $\frac{u_x v}{c^2}$:

$$\frac{u_x v}{c^2}=\frac{v^2+u'_x v}{c^2+u'_x v} \quad (29)$$

Podstawiając to do naszego ułamka $\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)}$, uzyskujemy we wspólnym mianowniku:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{c^2+u'_x v-(v^2+u'_x v)}{c^2+u'_x v}} \quad (30)$$

Człon $u'_x v$ się kasuje w liczniku ułamka z mianownika, a wyciągając c^2 przed nawias, mamy:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)=\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right) \quad (31)$$

Co umożliwia nam zapisanie całego wektora *F'* ze wzoru (25) jako:

$$\vec{F}'=F_x\hat{i}'+\gamma F_y\hat{j}'+\gamma F_z\hat{k}'-\frac{\gamma v}{c^2}\left[F_y u'_y+F_z u'_z\right]\hat{i}'+\frac{u'_x v}{c^2}\left[\gamma F_y\hat{j}'+\gamma F_z\hat{k}'\right] \quad (32)$$

Wektor ten przy dobrym wyczuciu matematycznym odnośnie struktury iloczynu wektorowegodaje się podzielić na dwie składowe:

$$\begin{gathered}\vec{F}'=\vec{F}'_1+\vec{F}'_2\\ \vec{F}'_1=F_x\hat{i}'+\gamma F_y\hat{j}'+\gamma F_z\hat{k}'\\ \vec{F}'_2=\vec{u}'\times\left[\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{F}'_1\right]\end{gathered} \quad (33)$$

gdzie *v* jest wektorem prędkości układu nieprimowanego względem primowanego (czyli ma wartość ***-v***, w stosunku do poprzednich rachunków) Aby udowodnić, że ta relacja zachodzi, obliczymy jawnie iloczyn wektorowy *F'₂* i sprawdzimy czy odzyskamy relację (32). Dla przypomnienia, iloczyn wektorowy dwóch wektorów w matematyce obliczamy jako:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\hat{i}\,(A_y B_z - A_z B_y)+\hat{j}\,(A_z B_x - A_x B_z)+\hat{k}\,(A_x B_y - A_y B_x) \quad (34)$$

Ponieważ na samym początku założyliśmy, że wektor prędkości *v* posiada tylko składową *x*-ową, mamy teraz z punktu widzenia układu primowanego ten wektor o ujemnej wartości *v=[-v,0,0]*, co daje:

$$\begin{gathered}\vec{v}\times\vec{F}_1=-v\gamma F_z\hat{j}'+v\gamma F_y\hat{k}'\\ \vec{u}'\times(\vec{v}\times\vec{F}_1)=\hat{i}'(-u'_y v\gamma F_y-u'_z v\gamma F_z)+\hat{j}'u'_x v\gamma F_y+\hat{k}'u'_x v\gamma F_z\\ \vec{u}'\times(\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{F}_1)=-\hat{i}'(u'_y\frac{v}{c^2}\gamma F_y+u'_z\frac{v}{c^2}\gamma F_z)+\hat{j}'u'_x\frac{v}{c^2}\gamma F_y+\hat{k}'u'_x\frac{v}{c^2}\gamma F_z\end{gathered} \quad (35)$$

Co umożliwia odtworzenie relacji (31). W ten sposób uzyskaliśmy wzory (32) na transformację dowolnej siły, działającej na ciało. Teraz zastosujemy je do prawa Coulomba.

Relatywistyczna transformacja siły Coulomba dla małych prędkości

Podstawiając w równaniach (33) za *F* siłę Coulomba,

$$\vec{F}=\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r} \quad (36)$$

Dostaniemy dwie składowe, F_1' oraz F_2': Ponieważ rozpatrujemy tutaj nieduże prędkości, w transformacji F_1' możemy przyjąć, że $\gamma\to 1$, a w związku z tym:

$$\vec{F}'_1=\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{r}' \quad (37)$$

jest zwykłą siłą Coulomba w nowym układzie odniesienia. Ale oprócz tej „zwykłej siły Coulomba" pojawia się również składowa F_2':

$$\vec{F}'_2=q\vec{u}'\times\left[\frac{q_0\vec{v}\times\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'^3}\right] \quad (38)$$

Gdzie ruch ładunku q_0 z prędkością $\vec{v}=\frac{d\vec{l}}{dt}$ można utożsamić z prądem $I=\frac{q_0}{dt}$ na odcinku $d\vec{l}$. W efekcie wzór przepisujemy jako:

$$\vec{F}'_2 = q\vec{u}' \times \left[\frac{I\, d\vec{l} \times \vec{r}'}{4\pi \epsilon_0 c^2 r'^3} \right] \quad (39)$$

Co dało nam (uwaga!) siłę o strukturze siły Lorenza $F = q\vec{u}' \times \vec{B}$, gdzie pole magnetyczne *B* (właściwie tutaj—nieskończenie małe pole *dB*, wywyłane prądem na nieskończenie małym odcinku *dl*) definiowane jest wyrażeniem z nawiasu kwadratowego, czyli:

$$d\vec{B} = \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{r}'}{4\pi \epsilon_0 c^2 r'^3} \quad (40)$$

Przy czym z teorii fal elektromagnetycznych Maxwella wiemy, że $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, a zatem ostateczny wzór na pole magnetyczne *B* (Biota-Savarta), to:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I\, d\vec{l} \times \vec{r}'}{4\pi r'^3} \quad (41)$$

I to już koniec rozważań. Widzimy jak fundamentalne relacje magnetyzmu wynikają z oddziaływań elektrostatyki z uwzględnieniem „odrobiny” relatywistyki. Niesamowite, prawda?

Literatura:

Artykuł, w którym znajdował się kilka lat temu szkic przedstawionego wyprowadzenia napisał Artice M. Davis z San Jose Univeristy i nosił on tytuł From Coulomb to Biot-Savart via relativity. Artykuł ten jednak nie zawierał wielu szczegółów (np. uzasadnienia reguły transformacji masy relatywistycznej, szczegółów przekształceń transformacji siły, itd), które odtworzyłem w niniejszej pracy.